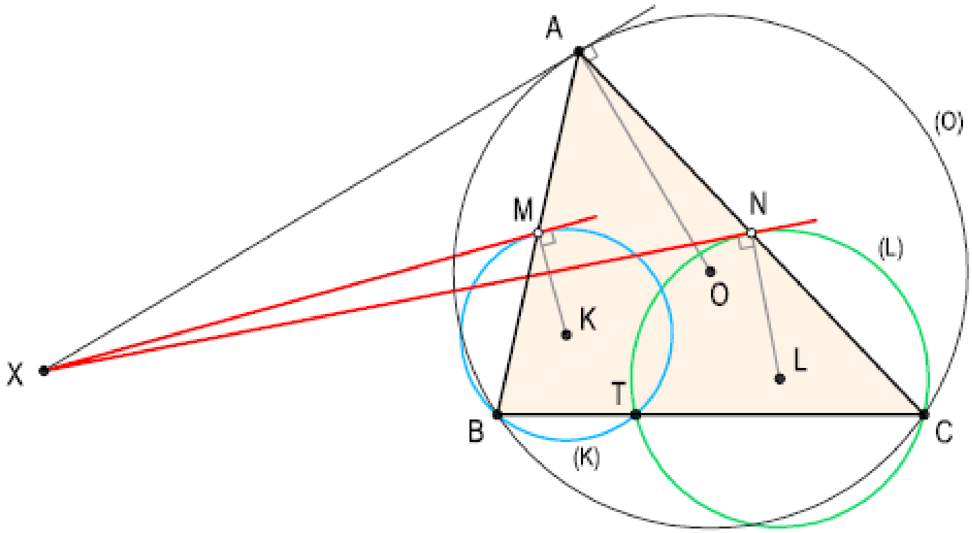
ΤΟΜΗ ΚΥΚΛΩΝ ΕΠΙ ΠΛΕΥΡΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ (Merlijn Staps – Ολλανδία)

Δίνεται τρίγωνο ΔABC με περίκυκλο (O) και έστω M, N, τα μέσα των πλευρών του AB, AC, αντιστοίχως. Έστω X, τυχόν σημείο επί της εφαπτομένης του κύκλου (O) στο σημείο A και ας είναι $(K), (L)$, οι κύκλοι με χορδές τα τμήματα BM, CN αντιστοίχως, οι οποίοι εφάπτονται των ευθειών XM, XN. Αποδείξτε ότι το ένα σημείο τομής τους κείται επί της πλευράς BC.



Η πρόταση αυτή οφείλεται στον **Merlijn Staps** και πρωτοδημοσιεύτηκε στο φόρουμ **AoPS**, όπου ο αναγνώστης θα βρει πληθώρα αποδείξεων.

https://artofproblemsolving.com/community/c6h1751587

Έχει επιλεχθεί επίσης, ως θέμα στους διαγωνισμούς επιλογής των **USA Winter TST for IMO 2019, Problem 1 και TST for EGMO 2019, Problem 2.**

Μία συνθετική λύση έχει αναρτήσει την Ιστοσελίδα του ο **Jean-Louis Ayme**, υπέρμαχος του συνθετικού τρόπου αποδείξεως των γεωμετρικών προβλημάτων.

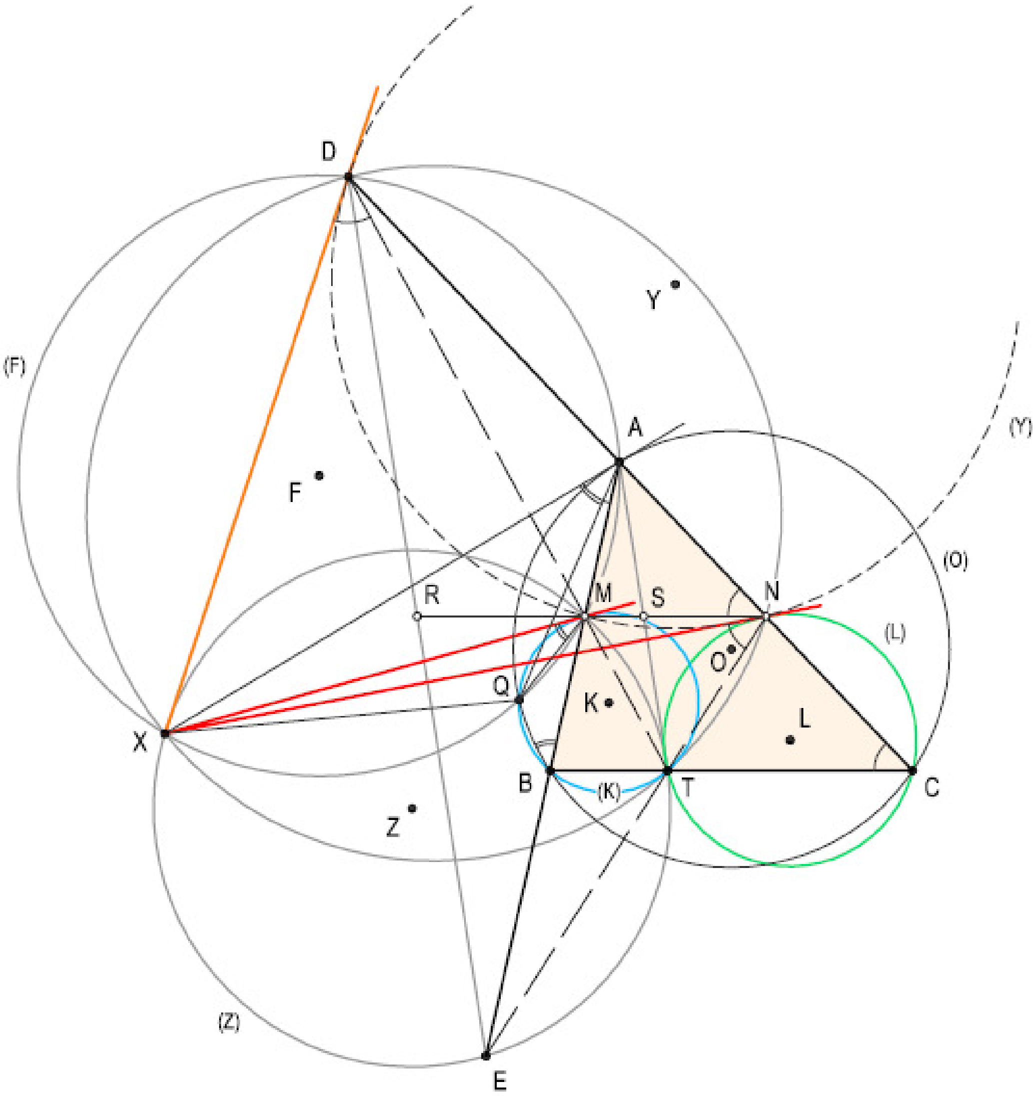
ttp://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/Docs/Intersection%20sur%20un%20cote.pdf

Η απόδειξη που ακολουθεί στα επόμενα, δημοσιεύτηκε στο φόρουμ **mathematica.gr**, όπου και η επανεμφάνιση του προβλήματος ως προτεινόμενο θέμα, από τον εξαίρετο Γεωμέτρη **Στάθη Κούτρα**.

https://mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=185&t=70567

ΤΟΜΗ ΚΥΚΛΩΝ ΕΠΙ ΠΛΕΥΡΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ (Merlijn Staps – Ολλανδία)

Δίνεται τρίγωνο ΔABC με περίκυκλο (O) και έστω M, N, τα μέσα των πλευρών του AB, AC, αντιστοίχως. Έστω X, τυχόν σημείο επί της εφαπτομένης του κύκλου (O) στο σημείο A και ας είναι $(K), (L)$, οι κύκλοι με χορδές τα τμήματα BM, CN αντιστοίχως, οι οποίοι εφάπτονται των ευθειών XM, XN. Αποδείξτε ότι το ένα σημείο τομής τους κείται επί της πλευράς BC.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

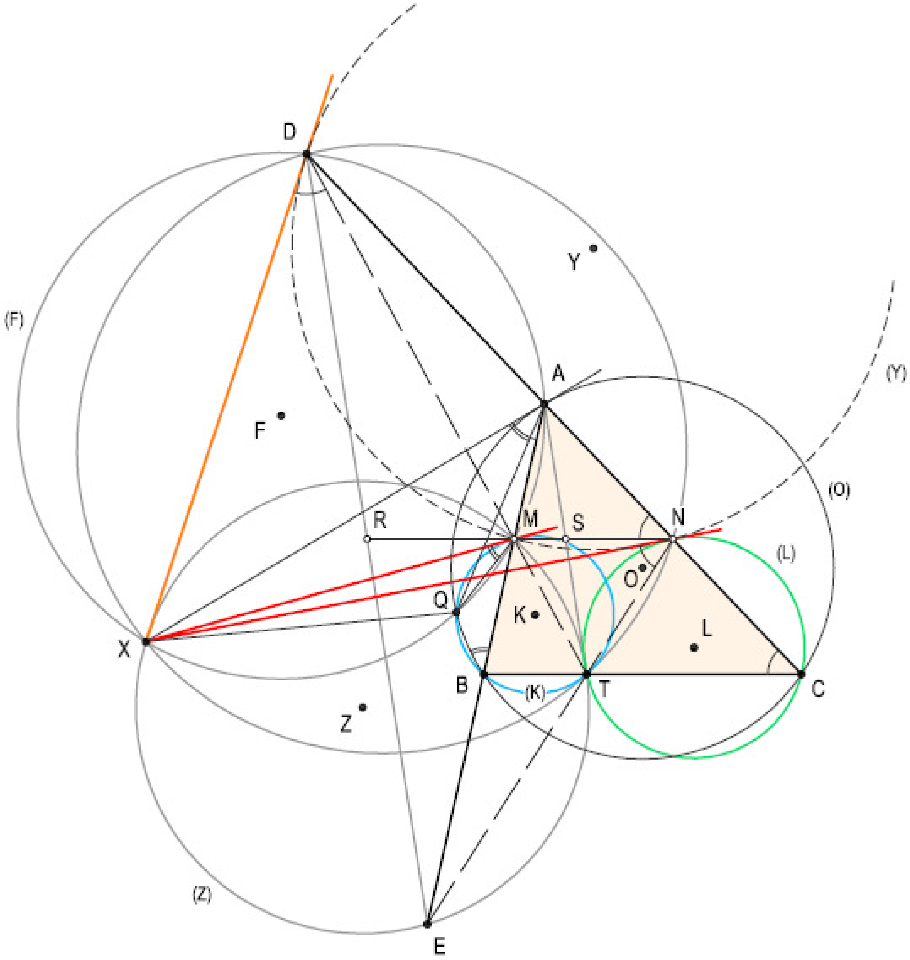
Έστω T, το σημείο τομής της πλευράς BC του δοσμένου τριγώνου $\triangle ABC$, από τον κύκλο έστω (K) χορδής BM, όπου M είναι το μέσον της AB, ο οποίος εφάπτεται της ευθείας XM, με X τυχόν σημείο της ευθείας XA, εφαπτομένης του περίκυκλου (O) του $\triangle ABC$.

Αρκεί ως ισοδύναμο ζητούμενο να αποδειχθεί ότι η ευθεία XN, όπου N είναι το μέσον της AC, εφάπτεται στον περίκυκλο του τριγώνου $\triangle NTC$.

- Έστω το σημείο $Q \equiv (O) \cap (K)$ και από $\angle QMX = \angle QBM \equiv \angle QBA = \angle QAX$, (1) έχουμε ότι το τετράπλευρο $AMQX$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο έστω (F).

Έστω το σημείο $D \equiv AC \cap MT$ και έχουμε ότι το σημείο Q ταυτίζεται με το **Σημείο Miquel** στο πλήρες τετράπλευρο $CAMTBD$ και άρα, ο περίκυκλος του τριγώνου $\vartriangle AMD$ περνάει από το σημείο Q και επομένως, το σημείο D ανήκει στον κύκλο (F).

Από $\angle XDM = \angle XAM = \angle C = \angle MND$,(2) τώρα, προκύπτει ότι η ευθεία XD εφάπτεται στον περίκυκλο έστω (Y) του τριγώνου $\vartriangle DMN$.



• Έστω το σημείο $E \equiv AB \cap NT$ και έχουμε ότι το τετράπλευρο $ADET$ είναι τραπέζιο γιατί η ευθεία MN περνάει από το μέσον S του τμήματος AT.

Σύμφωνα με το παρακάτω **Λήμμα**, η εφαπτομένη του κύκλου (Y) στο σημείο D, τέμνει τον περίκυκλο του τριγώνου $\vartriangle AMD$ κατά το **Σημείο Miquel** στο πλήρες τετράπλευρο $NAMTDE$.

Το σημείο X δηλαδή, ταυτίζεται με το **Σημείο Miquel** του $NAMTDE$ και άρα, το τετράπλευρο $DNTX$ είναι εγγράψιμο και επομένως ισχύει $\angle XNT = \angle XDT \equiv \angle XDM$,(3)

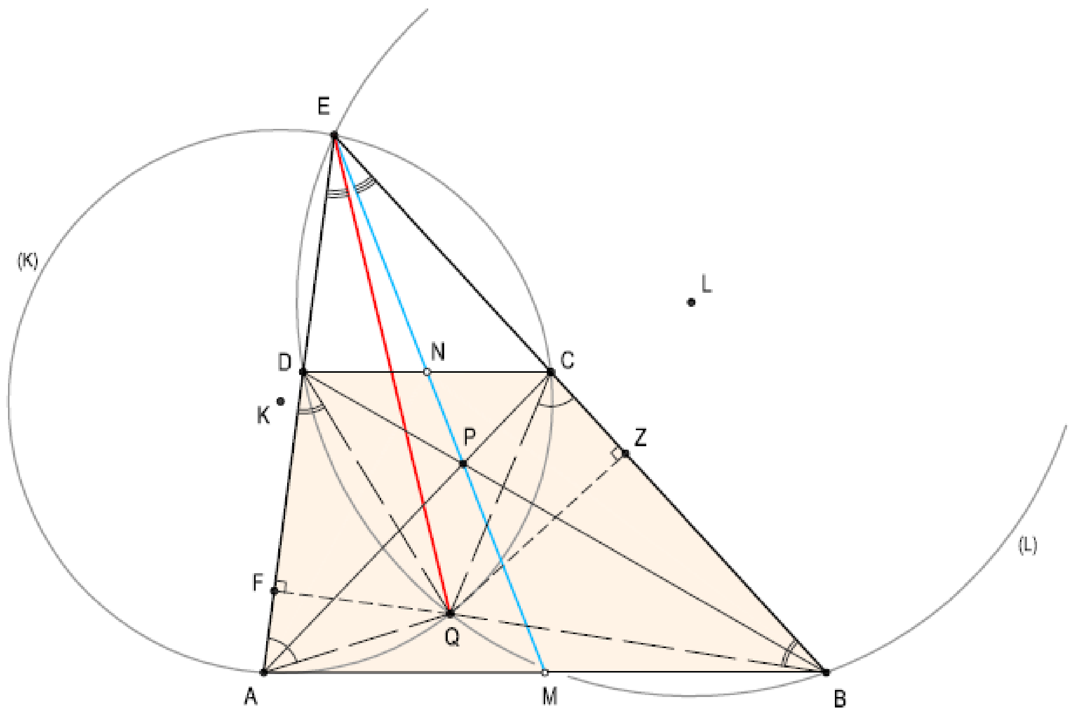
$$\text{Από } (2),\ (3) \Rightarrow \angle XNT = \angle C \quad ,(4)$$

Από (4) συμπεραίνεται ότι η ευθεία XN εφάπτεται του κύκλου (L) και το ισοδύναμο ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

• Η απόδειξη αυτή είναι αφιερωμένη σε ένδειξη τιμής, στον ταλαντούχο μαθητή **Ορέστη Λιγνό**, που μας κάνει περήφανους με τις επιδόσεις του στα Μαθηματικά και τις επιτυχίες του στους εγχώριους και διεθνείς Διαγωνισμούς.

ΛΗΜΜΑ

Δίνεται τραπέζιο $ABCD$ με $AB \parallel CD$ και έστω τα σημεία $E \equiv AD \cap BC$ και $P \equiv AC \cap BD$ και ας είναι Q, το δεύτερο εκτός του E σημείο τομής των περικύκλων των τριγώνων $\triangle EAC$, $\triangle EBD$. Αποδείξτε ότι $\angle AEQ = \angle BEP$.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Από τα εγγράψιμα $AECQ$, $BEDQ$, έχουμε $\angle DAQ = \angle BCQ$,(1) και $\angle ADQ = \angle CBQ$,(2)

Από (1), (2), προκύπτει ότι τα τρίγωνα $\triangle ADQ$, $\triangle CBQ$ είναι όμοια και άρα :

$$\frac{QA}{QC} = \frac{AD}{BC} \quad ,(3)$$

Έστω F, Z, οι προβολές του σημείου Q επί των AE, BE αντιστοίχως και από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα $\triangle FAQ$, $\triangle ZCQ$, έχουμε :

$$\frac{QA}{QC} = \frac{QF}{QZ} \quad ,(4)$$

Από (3), (4) και $\frac{AD}{BC} = \frac{EA}{EB} \Rightarrow \qquad \frac{QF}{QZ} = \frac{EA}{EB} \quad ,(5)$

Από (5) προκύπτει ότι η ευθεία EQ ταυτίζεται με την E-συμμετροδιάμεσο στο τρίγωνο $\triangle EAB$.

Η ευθεία EP όμως, περνάει από τα μέσα M, N των βάσεων του δοσμένου τραπεζίου και επομένως ταυτίζεται με την E-διάμεσο στο ίδιο τρίγωνο.

Συμπεραίνεται έτσι ότι $\angle AEQ = \angle BEP$,(6) και το **Λήμμα** έχει αποδειχθεί.

ΣΧΟΛΙΟ

Η ως άνω απόδειξη του **Λήμματος** πρωτοεμφανίστηκε δημόσια στο **AoPS**, σε πρόβλημα που είχα προτείνει τον Νοέμβριο του 2007 (**Isogonality in a trapezium**), δοσμένη από τον **Han-sol Snin**, δυνατό νοτιοκορεάτη γεωμέτρη που υπογράφει με το ψευδώνυμο **Leonard Euler**.

https://artofproblemsolving.com/community/c6h175434_isogonality_in_a_trapezium

Τον Απρίλιο του 2009, το πρόβλημα αυτό εμφανίζεται πάλι στο **AoPS** και αποκτά δημοσιότητα, ως πρόβλημα διαγωνισμού στην **BMO 2009** (**Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα**), επιλεγμένο μετά από πρόταση της Μολδαβίας. Ως δημιουργός (;) του εμφανίζεται το όνομα **Liubomir Chiriac.**

https://artofproblemsolving.com/community/c6h274320_nice_symmedian_property

- Για τον συσχετισμό τώρα του **Λήμματος** με το αρχικό πρόβλημα, από $\angle QAC = \angle QEC$, λόγω του εγγραψίμου τετραπλεύρου $AECQ$ και $\angle QEC = \angle AEP$ λόγω της (6), προκύπτει ότι η ευθεία QA εφάπτεται στον περίκυκλο του τριγώνου $\triangle AEP$ και ομοίως, η ευθεία QB εφάπτεται στον περίκυκλο του τριγώνου $\triangle BEP$.