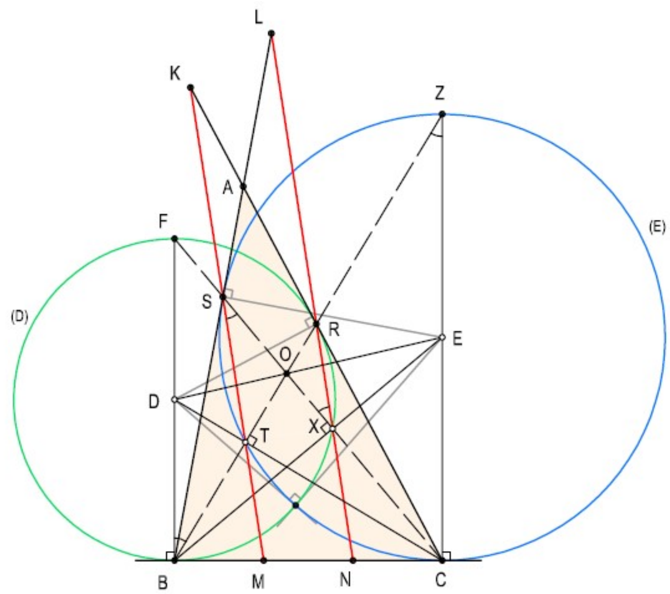
RomGeom – PROBLEM 7031 (Juan Jose Isach Mayo – Ισπανία)

Δίνεται τρίγωνο ΔABC και έστω (D), και (E), κύκλοι εφαπτόμενοι των ευθειών των γωνιών του $\angle C$, $\angle B$, στα σημεία B, C, αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι $(BD)^2 + (CE)^2 = (DE)^2 \Leftrightarrow AB + AC = 3BC$, όπου D, E, είναι τα κέντρα των κύκλων (D), (E), αντιστοίχως.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Έστω ότι ισχύει $(BD)^2 + (CE)^2 = (DE)^2$ (1) και θα αποδειχθεί ότι $AB + AC = 3BC$.

Από (1) έχουμε ότι οι κύκλοι (D), και (E), όπως ορίζονται στην εκφώνηση, τέμνονται ορθογωνίως.

Έστω τα σημεία $F \equiv (D) \bigcap BD$ και $Z \equiv (E) \bigcap CE$ και από $BF \parallel CZ$ και $BD = DF$ και $CE = EZ$, προκύπτει ότι το σημείο έστω $O \equiv BZ \bigcap CF$ κείται επί της DE.

Λόγω της ορθογωνιότητας των κύκλων (D), (E), σύμφωνα με το παρακάτω **Λήμμα**, έχουμε ότι η ευθεία CS, ως η Πολική ευθεία του σημείου B ως προς τον κύκλο (E), περνάει από το σημείο F (= αντιδιαμετρικό σημείο του B) και επομένως έχουμε $CS \equiv CF$ και άρα, τα σημεία C, O, S, F, είναι συνευθειακά.

Ομοίως, τα σημεία B, O, R, Z, είναι συνευθειακά.

Έστω τα σημεία $T \equiv (E) \bigcap BZ$ και $X \equiv (D) \bigcap CF$.

- Από την CS, ως την Πολική ευθεία του σημείου B ως προς τον κύκλο (E), έχουμε ότι η σημειοσειρά B, T, O, Z είναι αρμονική και άρα, η δέσμη $C.BTOZ$ είναι αρμονική.

Η δέσμη $C.BDFZ$ είναι επίσης αρμονική, λόγω $BF \parallel CZ$ και $BD = DF$.

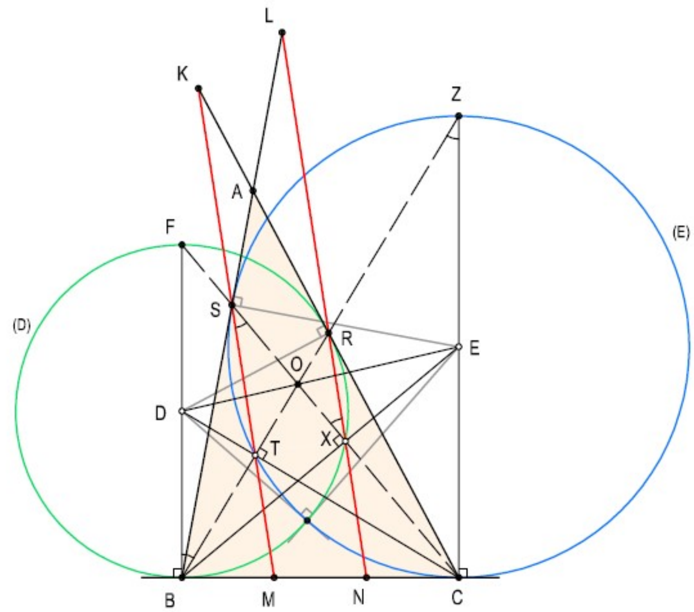
Από τις αρμονικές αυτές δέσμες, με $CB \equiv CB$ και $CO \equiv CF$ και $CZ \equiv CZ$, προκύπτει ότι $CT \equiv CD$ και επομένως, τα σημεία C, T, D, είναι συνευθειακά.

Ομοίως, τα σημεία B, X, E, είναι συνευθειακά.

Από $DT \equiv CT \perp TZ \equiv BR$ τώρα, προκύπτει $BT = TR$ (2) και ομοίως έχουμε $CX = XS$ (3)

Αποδεικνύεται εύκολα ότι $ST \parallel RX$ (4), λόγω $\angle TSC = \angle TZC = \angle RBF = RXF$, από τα εγγράψιμα τετράπλευρα $BXRF$, $CTSZ$.

Από (2), (3), (4) $\Rightarrow$ $BM = MN = NC$ (5), όπου $M \equiv BC \cap ST$ και $N \equiv BC \cap RX$.



• Έστω τα σημεία $K \equiv AC \cap SM$ και $L \equiv AB \cap RN$.

Από $SM \parallel LN$ και $BM = MN$ $\Rightarrow$ $BS = SL$ (6)

Ομοίως, από $RN \parallel KM$ και $MN = NC$ $\Rightarrow$ $CR = RK$ (7)

Από (6), (7) και $BS = BC = CR$ $\Rightarrow$ $SL = RK = BC$ (8)

Από (8), $\Rightarrow$ το $RSKL$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και επομένως ισχύει $AS = AK$ (9) και $AR = AL$ (10)

Από (9), (10) $\Rightarrow$ $AS + AR = AS + AL = SL = BC$ (11) λόγω της (8).

Συμπεραίνεται έτσι, ότι $AB + AC = AS + SB + CR + AR = 3BC$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

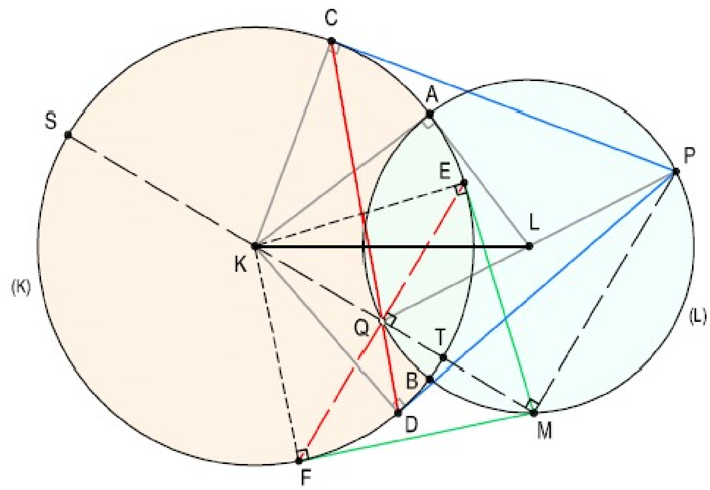
(1) Η πρόταση αυτή οφείλεται στον **Juan Jose Isach Mayo**, που ζει και δημιουργεί στην πόλη Βαλένθια της Ισπανίας και συμμετέχει ενεργά στην ομάδα **Romantics of Geometry** του Facebook όπου εμφανίστηκε ως άσκηση 7031 προτεινόμενη από τον ίδιο, δίνοντας και μία εναλλακτική αλγεβρική απόδειξη (σελίδα 4).

https://www.facebook.com/groups/parmenides52/permalink/3610771002369913/

(2) Αφήνεται στον αναγνώστη η απόδειξη της ορθογωνιότητας ($\Rightarrow (BD)^2 + (CE)^2 = (DE)^2$) των κύκλων (D), (E), όταν στο δοσμένο τρίγωνο $\triangle ABC$ ισχύει $AB + AC = 3BC$.

ΛΗΜΜΑ

Σε δύο δοσμένους κύκλους οι οποίοι τέμνονται ορθογωνίως, η Πολική ευθεία τυχόντος σημείου του ενός κύκλου ως προς τον άλλον κύκλο, περνάει από το αντιδιαμετρικό του σημείο.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω (K), (L), οι δοσμένοι κύκλοι τεμνόμενοι ορθογωνίως στα σημεία A, B, και ας είναι P, τυχόν σημείο του κύκλου (L) και PC, PD, οι εφαπτόμενες του κύκλου (K) από το P και θα αποδειχθεί ότι η ευθεία CD περνάει από το αντιδιαμετρικό σημείο του P, έστω το σημείο Q.

Η ευθεία KQ, όπου K είναι το κέντρο του κύκλου (K), τέμνει τον κύκλο (L) στο σημείο έστω M και ας είναι ME, MF, οι εφαπτόμενες του (K).

Από την Δύναμη του σημείου K ως προς τον κύκλο (L) έχουμε:

$$(KQ)(KM) = (KA)^2 = (KE)^2 \quad (1)$$

Από (1), στο ορθογώνιο τρίγωνο $\vartriangle EKM$, προκύπτει $EQ \perp KM$ και άρα, τα σημεία E, Q, F, είναι συνευθειακά.

Η ευθεία EF τώρα, ταυτίζεται με την Πολική ευθεία του σημείου M ως προς τον κύκλο (K) και επομένως, η σημειοσειρά S, Q, T, M είναι αρμονική, όπου $S, T \equiv (K) \bigcap KQ$.

Έτσι, η ευθεία $PM \perp KM$ ταυτίζεται με την Πολική ευθεία του σημείου Q ως προς τον κύκλο (K), ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων των οποίων οι Πολικές ευθείες ως προς τον (K) περνάνε από το σημείο Q.

Επομένως, η ευθεία CD, ως η Πολική ευθεία του σημείου $P \in PM$ ως προς τον κύκλο (K) περνάει από το σημείο Q και το **Λήμμα** έχει αποδειχθεί.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

(1) Η ως άνω απόδειξη του **Λήμματος** έχει δημοσιευτεί παλιότερα στο φόρουμ AoPS με την ευκαιρία συζήτησης άλλου προβλήματος που πρότεινε ο **Amir Saeidy**, δυνατός Γεωμέτρης που ζει και δημιουργεί στην Τεχεράνη.

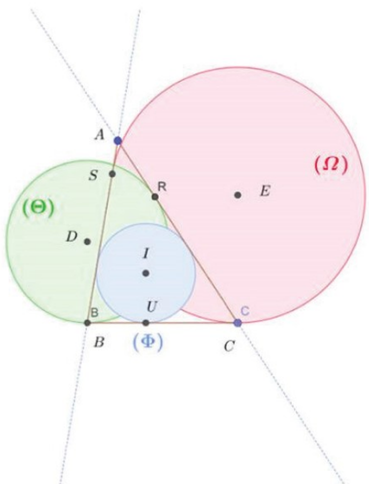
https://artofproblemsolving.com/community/c6h152342 (post 14)

Ακολουθεί φωτοαντίγραφο της αλγεβρικής απόδειξης που έδωσε ο **Juan Jose Isach Mayo**, όπως εμφανίζεται στην ομάδα **Romantics of Geometry** του facebook.

Problema de Juan José Isach Mayo
Publicado 30 12 2020

Problema de Juan José Isach Mayo

Problem



I is the center of the incircle, (Φ), of $\triangle ABC$

D is the center of the circle (Θ), tangent to BC in B and to AC in R

E is the center of the circle (Ω), tangent to BC in C and to AB in S

Prove that:

$$BD^2 + CE^2 = DE^2 \Leftrightarrow AB + AC = 3BC$$

Solution

Solución:

In $\triangle ABC$ we have that $AB = c, AC = b$ and $BC = a$. Then if I is the incenter of ABC and U is the touch point of (I) wrt BC. It's verified that

$$r(I) = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2(a+b+c)} = IU$$

Let D the center of circle tangent to BC in B and to AC in R. By similarity between the triangles $\triangle CIU$ and $\triangle CDB$ we know that $CU = \frac{a+b-c}{2}$ and $BU = \frac{a-b+c}{2}$

$$DB = IU \cdot \frac{BC}{UC} = \frac{2a \cdot r(I)}{a+b-c}$$

Let E the center of circle tangent to BC in C and to AB in S.By similarity between the triangles $\triangle BEC$ and $\triangle BIU$

$$EC = IU \cdot \frac{BC}{BU} = \frac{2a \cdot r(I)}{a-b+c}$$

How $ET = EC - CT$ where T is the ortogonal projection of D on EC

$$\begin{aligned} ET &= \frac{4a \cdot r(I)\,(b-c)}{(a-b+c)\,(a+b-c)} \\ ET^2 &= \frac{4a^2(-a+b+c)\,(b-c)^2}{(a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c)} \end{aligned}$$

Applying Pitagoras in $\triangle DET$ we have

$$\begin{aligned} DE^2 &= ET^2 + DT^2 = ET^2 + BC^2 = \frac{4a^2(-a+b+c)(b-c)^2}{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} + a^2 \\ DE^2 &= a^2\frac{-5ab^2 + a^2b - 5ac^2 + a^2c - 3bc^2 - 3b^2c + a^3 + 3b^3 + 3c^3 + 10abc}{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)} \end{aligned}$$

Let's calculate now $DB^2 + EC^2$

$$DB^2 + EC^2 = \frac{2a^2(-a+b+c)(-2bc + a^2 + b^2 + c^2)}{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

$DB^2 + EC^2 = DE^2 \iff \frac{2a^2(-a+b+c)\left(-2bc+a^2+b^2+c^2\right)}{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} = a^2\frac{-5ab^2+a^2b-5ac^2+a^2c-3bc^2-3b^2c+a^3+3b^3+3c^3+10abc}{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)}$

$0 = 2(-a+b+c)\left(a^2 + (b-c)^2\right) - (-5ab^2 + a^2b - 5ac^2 + a^2c - 3bc^2 - 3b^2c + a^3 + 3b^3 + 3c^3 + 10abc)$

$0 = -(a+b-c)(3a-b-c)(a-b+c)$

The only validate solution is that

$$3a = b + c$$