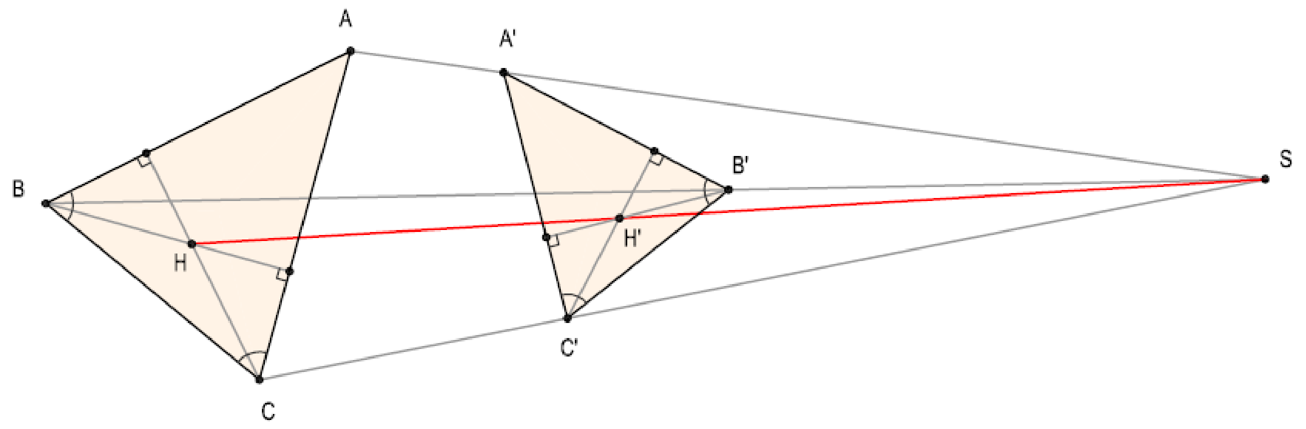
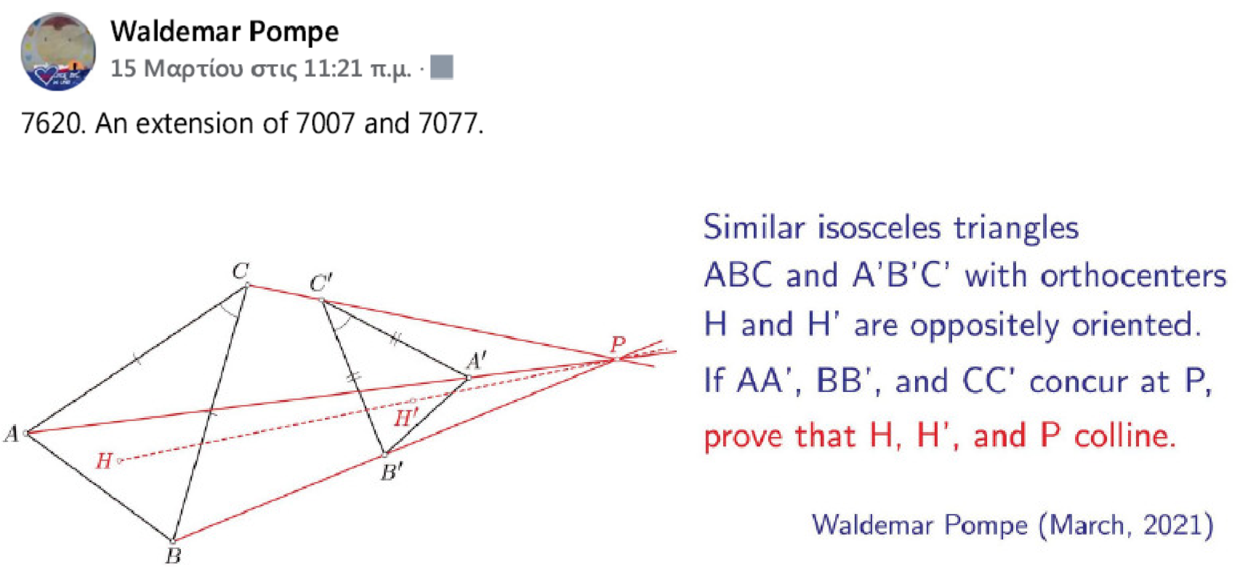
RomGeom – PROBLEM 7620 (Waldemar Pompe – Πολωνία)

Δίνονται δύο όμοια τρίγωνα $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, με αντίθετο προσανατολισμό και συντρέχουσες τις ευθείες των ομολόγων κορυφών τους AA', BB', CC', στο σημείο έστω P. Αποδείξτε ότι τα ορθόκεντρά τους H, H' και το σημείο P, ανήκουν στην ίδια ευθεία.



Το πρόβλημα αυτό οφείλεται στον **Waldemar Pompe** και εμφανίστηκε στην ομάδα **Romantics of Geometry** του Facebook τον Μάρτιο του 2021.

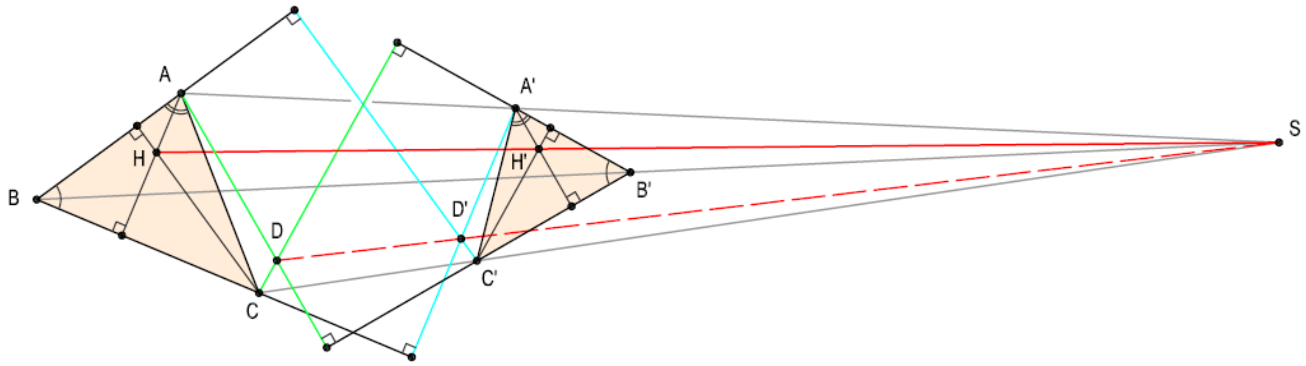
https://www.facebook.com/groups/parmenides52/permalink/3811849112262100/



• Η απόδειξη που ακολουθεί στα επόμενα, αφορά στην γενίκευση του προβλήματος με όμοια τρίγωνα εν γένει, αντί ισοσκελών.

RomGeom – PROBLEM 7620 - ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ

ΘΕΩΡΗΜΑ POMPE. Εάν δύο αντιρρόπως όμοια τρίγωνα είναι και προοπτικά, τα ορθόκεντρά τους και το σημείο προοπτικότητας ανήκουν στην ίδια ευθεία.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

• Έστω τα όμοια τρίγωνα $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, με αντίθετο προσανατολισμό (= αντίρροπα τρίγωνα) και προοπτικά ως προς το σημείο έστω $S \equiv AA' \cap BB' \cap CC'$.

Επειδή τα τρίγωνα αυτά είναι όμοια και αντίρροπα (δεν είναι απαραίτητη η προοπτικότητά τους), σύμφωνα με το παρακάτω **Λήμμα 1**, έχουμε ότι τα τρίγωνα αυτά είναι επίσης ορθολογικά μεταξύ τους και έστω D, D', τα ορθολογικά τους σημεία.

Επειδή όμως, τα ορθολογικά αυτά τρίγωνα είναι και προοπτικά, σύμφωνα με το **Θεώρημα Sondat**, (*) συμπεραίνεται ότι η ευθεία που συνδέει τα σημεία D, D', περνάει από το σημείο S.

(Η ευθεία που συνδέει τα ορθολογικά τους σημεία, περνάει από το κέντρο προοπτικότητας).

• Τα προοπτικά τώρα τρίγωνα $\triangle ACD$, $\triangle A'C'D'$, αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι επίσης όμοια και αντίρροπα.

Στο διαμορφωμένο πλέον σχήμα, το ορθόκεντρο H του τριγώνου $\triangle ABC$, ταυτίζεται με το σημείο τομής των δια των σημείων A, C, παραλλήλων ευθειών προς τις ευθείες $A'D'$, $C'D'$ αντιστοίχως και ομοίως, το ορθόκεντρο H', του τριγώνου $A'B'C'$, ταυτίζεται με το σημείο τομής των δια των σημείων A', C', παραλλήλων ευθειών προς τις ευθείες AD, CD, αντιστοίχως.

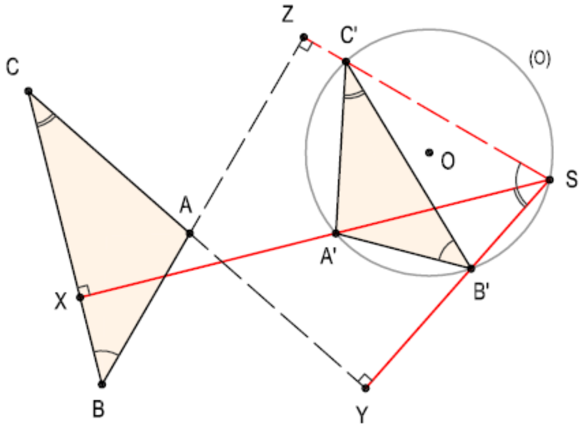
Έτσι, σύμφωνα με το παρακάτω **Λήμμα 2**, συμπεραίνεται ότι η ευθεία HH' περνάει από το σημείο S και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

(*) Το **Θεώρημα Sondat** αληθεύει για προοπτικά, ορθολογικά εν γένει τρίγωνα και όχι απαραίτητα όμοια και αντίρροπα όπως εδώ.

ΛΗΜΜΑ 1

Δύο τρίγωνα αντιρρόπως όμοια μεταξύ τους, είναι και ορθολογικά.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Έστω $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, δύο όμοια και αντίρροπα τρίγωνα, τυχαία συσχετισμένα μεταξύ τους και αρκεί να αποδειχθεί ότι οι δια των κορυφών A', B', C', του τριγώνου $\triangle A'B'C'$, κάθετες ευθείες επί των ευθειών των πλευρών BC, AC, AB αντιστοίχως, του τριγώνου $\triangle ABC$, συντρέχουν.

Έστω X, Y, οι προβολές των σημείων A', B', επί των ευθειών BC, AC αντιστοίχως και έστω το σημείο $S \equiv A'X \bigcap B'Y$ και αρκεί να αποδειχθεί ότι ισχύει $SC' \perp AB$.

Από $SX \perp BC$ και $SY \perp AC$ $\Rightarrow$ $\angle A'SB' = \angle ACB$ (1)

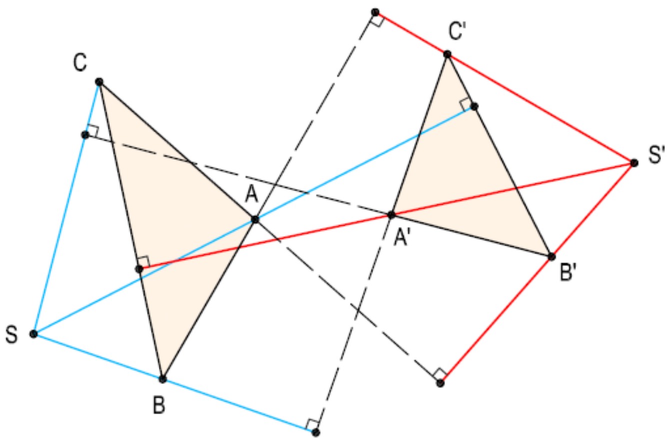
Από (1) και $\angle ACB = \angle A'C'B'$ $\Rightarrow$ $\angle A'SB' = \angle A'C'B'$ (2)

Από (2) έχουμε ότι το τετράπλευρο $A'B'SC'$ είναι εγγράψιμο και άρα ισχύει $\angle A'SC' = \angle A'B'C'$ (3)

Από (3) και $\angle A'B'C' = \angle ABC$ $\Rightarrow$ $\angle A'SC' = \angle ABC$ (4)

Από (4) και $SA' \perp BC$, συμπεραίνεται ότι $SC' \perp AB$ και το **Λήμμα 1** έχει αποδειχθεί.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

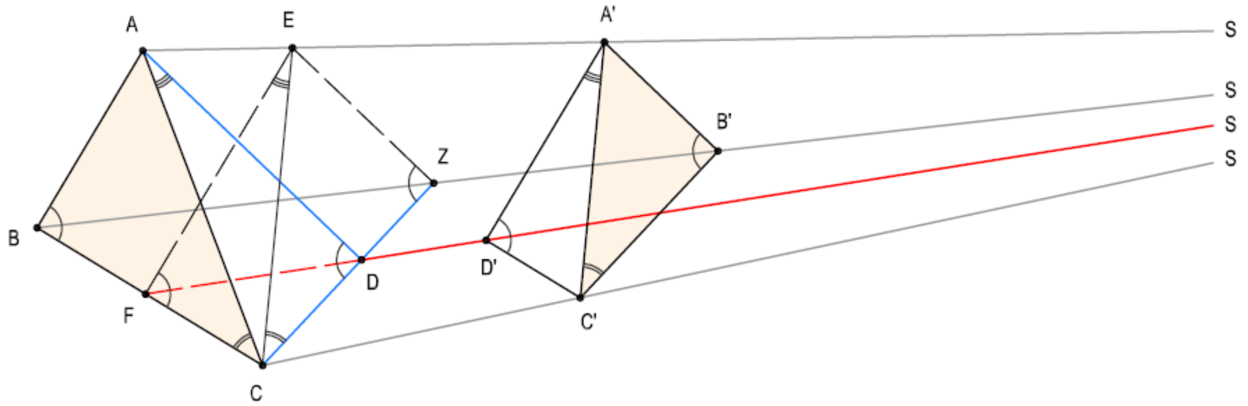


Για δύο δοσμένα τυχόντα τρίγωνα $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, τυχαία συσχετισμένα μεταξύ τους, εάν συμβαίνει να συντρέχουν οι δια των κορυφών A, B, C, του $\triangle ABC$ κάθετες ευθείες επί των ευθειών των πλευρών $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$ αντιστοίχως, του τριγώνου $\triangle A'B'C'$, τότε σύμφωνα με το **θεώρημα Carnot**, αποδεικνύεται ότι συντρέχουν και οι δια των κορυφών A', B', C', του τριγώνου $\triangle A'B'C'$, κάθετες ευθείες επί των ευθειών των BC, AC, AB αντιστοίχως, των πλευρών του τριγώνου $\triangle ABC$.

Τα ως άνω $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, ονομάζονται **Ορθολογικά τρίγωνα** και τα σημεία S, S' του σχήματος, ονομάζονται **Ορθολογικό σημείο** ή **Ορθολογικό κέντρο** έκαστο, του ενός ως προς το άλλο τρίγωνο. Το σημείο S για παράδειγμα, είναι το **Ορθολογικό σημείο** (**κέντρο**) του τριγώνου $\triangle ABC$, ως προς το τρίγωνο $\triangle A'B'C'$ κ.ο.κ. **Ορθόπολος**, είναι επίσης μία άλλη ονομασία που συναντάμε στην βιβλιογραφία, για τα σημεία S, S'.

ΛΗΜΜΑ 2

Δίνονται δύο αντιρρόπως όμοια τρίγωνα $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, προοπτικά επίσης ως προς το σημείο έστω S. Έστω D, το σημείο τομής των δια των σημείων A, C, παραλλήλων ευθειών προς τις ευθείες $A'B'$, $B'C'$ αντιστοίχως και ομοίως έστω D', το σημείο τομής των δια των σημείων A', C', παραλλήλων ευθειών προς τις ευθείες AB, BC, αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι η ευθεία DD' περνάει από το σημείο S.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Έστω το σημείο $Z \equiv BB' \bigcap CD$ και ας είναι E, το σημείο επί της AA', ώστε να είναι $ZE \parallel A'B'$.

Από $EA' \bigcap ZB' \bigcap CC' \equiv S$, σύμφωνα με το **Θεώρημα Desarques**, έχουμε ότι τα τρίγωνα $\triangle EZC$, $\triangle A'B'C'$ είναι προοπτικά και επομένως ισχύει $EC \parallel A'C'$, λόγω $EZ \parallel A'B'$ και $ZC \parallel B'C'$.

Έστω το σημείο $F \in BC$, ώστε να είναι $EF \parallel AB \parallel A'D'$.

Έχουμε διαμορφώσει έτσι, το σχήμα του κυρτού πενταγώνου $ABCZE$, με $\angle B = \angle Z$ και $\angle ECZ = \angle A'C'B' = \angle ACB$ και $AD \parallel EZ$ και $EF \parallel AB$.

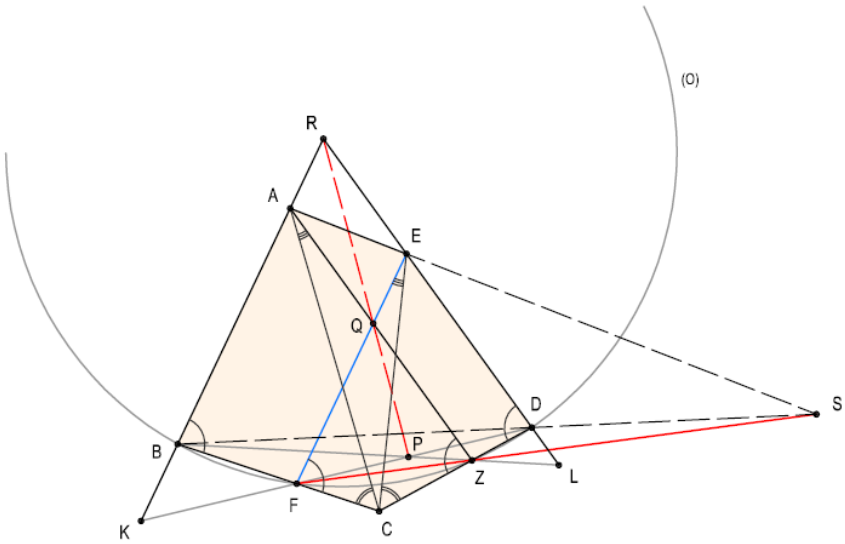
Σύμφωνα τώρα, με το παρακάτω **Λήμμα 3**, έχουμε ότι οι ευθείες AE, BZ, FD, τέμνονται στο ίδιο σημείο. Η ευθεία FD δηλαδή, περνάει από το σημείο $S \equiv EA' \bigcap ZB'$.

Από $EC \parallel A'C'$ και $EF \parallel A'D$ και $CF \parallel C'D'$ τώρα, έχουμε ότι τα τρίγωνα $\triangle ECF$, $\triangle A'C'D'$ είναι προοπτικά και άρα, οι ευθείες EA', FD', CC', τέμνονται στο ίδιο σημείο. Η ευθεία FD' δηλαδή, περναέι από το σημείο $S \equiv EA' \bigcap CC'$.

Συμπεραίνεται έτσι, ότι τα σημεία F, D, D', S, είναι συνεθειακά και το **Λήμμα 3** έχει αποδειχθεί.

ΛΗΜΜΑ 3

Δίνονται δύο αντιρρόπως όμοια τρίγωνα $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, προοπτικά επίσης ως προς το σημείο έστω S. Έστω D, το σημείο τομής των δια των σημείων A, C, παραλλήλων ευθειών προς τις ευθείες $A'B'$, $B'C'$ αντιστοίχως και ομοίως έστω D', το σημείο τομής των δια των σημείων A', C', παραλλήλων ευθειών προς τις ευθείες AB, BC, αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι η ευθεία DD' περνάει από το σημείο S.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Από τα όμοια τρίγωνα $\triangle ABC$, $\triangle EDC$, έχουμε $\dfrac{CD}{CB} = \dfrac{CE}{CA}$ (1)

  Από τα όμοια τρίγωνα $\triangle ACZ$, $\triangle ECF$, έχουμε $\dfrac{CE}{CA} = \dfrac{CF}{CZ}$ (2)

  Από (1), (2) $\Rightarrow \dfrac{CD}{CB} = \dfrac{CF}{CZ} \Rightarrow (CF)(CB) = (CZ)(CD)$ (3)

  Από (3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο $BFZD$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο έστω (O).

- Έστω τα σημεία $K \equiv AB \cap DF$ και $L \equiv ED \cap BZ$ και από $\angle B = \angle D \Rightarrow \angle FBK = \angle ZDL$ (4)

Από (4) και $\angle FBP = \angle ZDP$ και $\angle FPB = \angle ZPD$, όπου $P \equiv BZ \cap FD$, έχουμε ότι τα τρίγωνα $\triangle PBK$, $\triangle PDL$ είναι όμοια και άρα ισχύει $\dfrac{PF}{FK} = \dfrac{PZ}{ZL}$ (5) γιατί στα όμοια αυτά τρίγωνα, οι BF, DZ, είναι ομόλογες ευθείες αντιστοίχως.

Από (5) και $ZA \parallel LE$ και $FE \parallel KA$, σύμφωνα με το **θεώρημα των Αναλόγων Διαιρέσεων**, (*) έχουμε ότι τα σημεία P, $Q \equiv ZA \cap FE$ και $R \equiv KA \cap LE$ είναι συνευθειακά.

Τα σημεία όμως αυτά είναι και σημεία τομής των ευθειών μία προς μία, των πλευρών των τριγώνων $\triangle ABZ$, $\triangle EDF$ και σύμφωνα με το **θεώρημα Desarques**, τα τρίγωνα αυτά είναι προοπτικά και άρα, οι ευθείες AE, BD, FZ, τέμνονται στο ίδιο σημείο έστω S και το **Λήμμα 3** έχει αποδειχθεί.

(*) Βλέπε https://kostasvittas.gr/pdf/2020/RomGeom_PROBLEM_6708.pdf (**Λήμμα 1**)