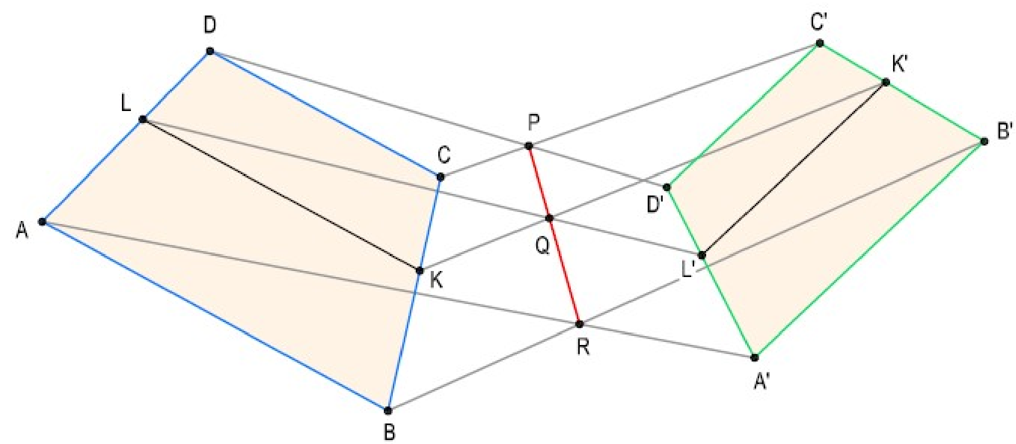
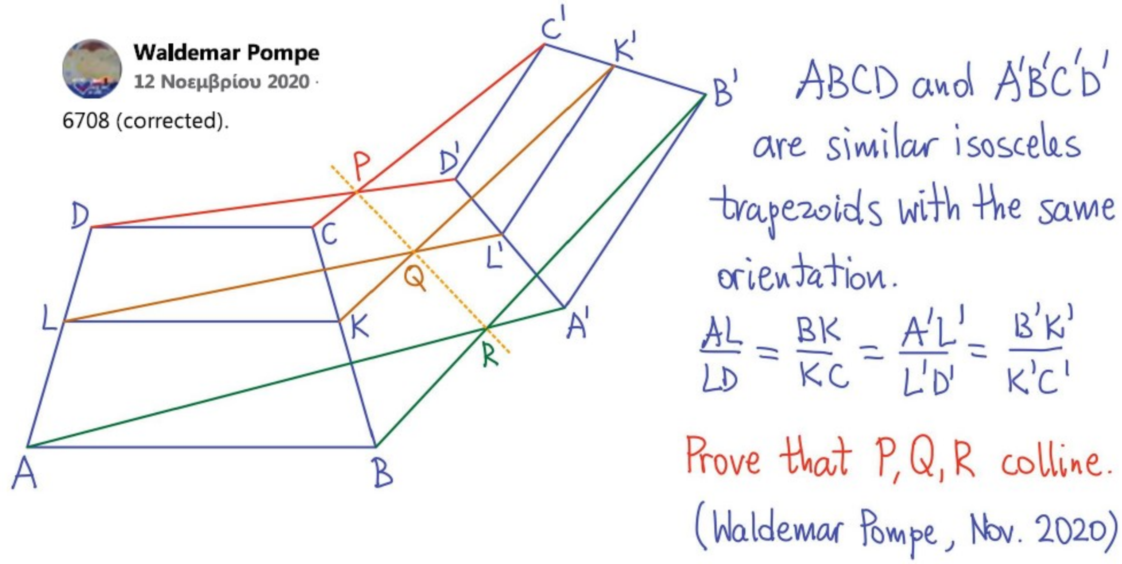
RomGeom – PROBLEM 6708 (Waldemar Pompe - Πολωνία)

Δίνονται δύο όμοια ισοσκελή τραπέζια $ABCD$ **με** $AB \parallel CD$ **και** $A'B'C'D'$ **με** $A'B' \parallel C'D'$, **με τον ίδιο προσανατολισμό και έστω τα σημεία** $L \in AD$ **και** $K \in BC$ **και** $L' \in A'D'$ **και** $K' \in B'C'$, **έτσι ώστε να είναι** $LK \parallel AB$ **και** $L'K' \parallel A'B'$ **και** $AL \div LD = A'L' \div L'D'$. **Αποδείξτε ότι τα σημεία** $P \in CC' \cap DD'$ **και** $Q \in KK' \cap LL'$ **και** $R \in AA' \cap BB'$ **είναι συνευθειακά**.



Το πρόβλημα αυτό οφείλεται στον **Waldemar Pompe** και εμφανίστηκε στην ομάδα **Romantics of Geometry** του Facebook τον Νοέμβριο του 2020, χωρίς να υπάρξει κάποια ανταπόκριση για λύση.

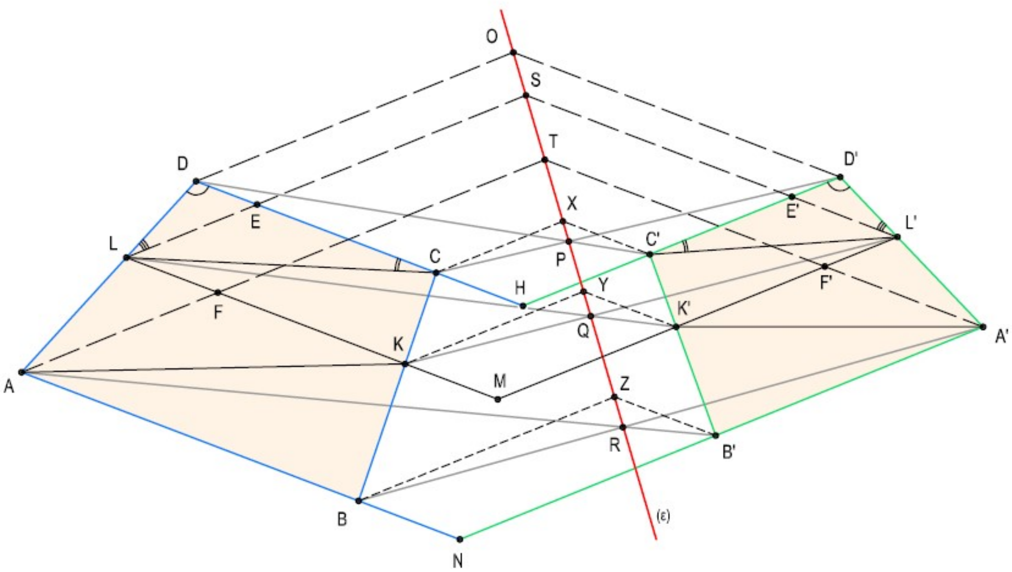
https://www.facebook.com/groups/parmenides52/permalink/3483202308460117/



Η απόδειξη που ακολουθεί στα επόμενα, αφορά στην επέκταση του προβλήματος με όμοια τραπέζια εν γένει, αντί ισοσκελών.

RomGeom – PROBLEM 6708 (Επέκταση)

Δίνονται δύο όμοια τραπέζια $ABCD$ με $AB \parallel CD$ και $A'B'C'D'$ με $A'B' \parallel C'D'$, με αντίθετο προσανατολισμό και έστω τα σημεία $L \in AD$ και $K \in BC$ και $L' \in A'D'$ και $K' \in B'C'$, έτσι ώστε να είναι $LK \parallel AB$ και $L'K' \parallel A'B'$ και $AL \div LD = A'L' \div L'D'$. Αποδείξτε ότι τα σημεία $P \in CD' \bigcap C'D$ και $Q \in KL' \bigcap K'L$ και $R \in AB' \bigcap A'B$ είναι συνευθειακά.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Δια των σημείων D, L, A, φέρνουμε τις παράλληλες ευθείες προς την ευθεία $C'D'$, οι οποίες τέμνουν τις δια των σημείων D', L', A' παράλληλες ευθείες προς την ευθεία CD, στα σημεία O, S, T, αντιστοίχως.

Από $\dfrac{AL}{LD} = \dfrac{A'L'}{L'D'}$, σύμφωνα με το παρακάτω **Λήμμα 1**, τα ως άνω σημεία O, S, T είναι συνευθειακά.

Ομοίως, οι δια των σημείων C, K, B παράλληλες ευθείες προς την ευθεία $C'D'$, τέμνουν τις δια των σημείων C', K', B' παράλληλες ευθείες προς την ευθεία CD, στα σημεία X, Y, Z αντιστοίχως, τα οποία, σύμφωνα επίσης με το **Λήμμα 1**, είναι συνευθειακά λόγω $\dfrac{BK}{KC} = \dfrac{B'K'}{K'C'}$.

- Έστω τα σημεία $E \equiv CD \bigcap LS$ και $E' \equiv C'D' \bigcap L'S$.

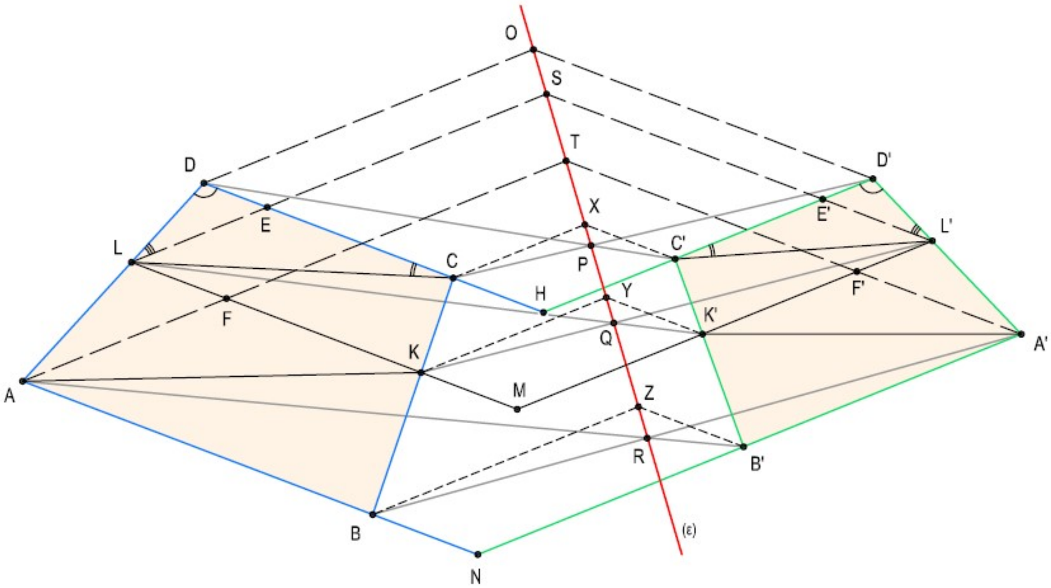
Στα όμοια τρίγωνα $\triangle CDL$, $\triangle C'D'L'$, οι ευθείες LE, $L'E'$ είναι ομόλογες και άρα, ισχύει $\dfrac{DE}{EC} = \dfrac{D'E'}{E'C'}$ (1)

Έτσι, από $DO \parallel ES \parallel CX$ και $D'O \parallel E'S \parallel C'X$, σύμφωνα πάλι με το **Λήμμα 1**, έχουμε ότι τα σημεία O, S, X, είναι συνευθειακά.

Έστω τα σημεία $F \equiv KL \cap AT$ και $F' \equiv K'L' \cap A'T$.

Με όμοιο τρόπο ως άνω, έχουμε $\dfrac{LF}{FK} = \dfrac{L'F'}{F'K'}$ (2) από τις ομόλογες ευθείες AF, $A'F'$, στα όμοια τρίγωνα $\triangle AKL$, $\triangle A'K'L'$, αντιστοίχως.

Επομένως, από $LS \parallel FT \parallel KY$ και $L'S \parallel F'T \parallel K'Y$, έχουμε ότι τα σημεία S, T, Y, είναι συνευθειακά.



Από τις ως άνω μέχρι τώρα συνευθειακότητες, προκύπτει ότι και τα έξι σημεία O, S, T, X, Y, Z, είναι συνευθειακά και ορίζουμε ως (ε), την ευθεία στην οποία ανήκουν.

- Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο $DOD'H$, όπου $H \equiv CD \cap C'D'$ και από $CX \parallel DO$ και $C'X \parallel D'O$, σύμφωνα με το παρακάτω **Λήμμα 2**, έχουμε ότι τα σημεία O, X και $P \equiv CD' \cap C'D$, είναι συνευθειακά και άρα, συμπεραίνεται ότι $P \in (\varepsilon)$ (3)

Ομοίως, από το παραλληλόγραμμο $LSL'M$, όπου $M \equiv KL \cap K'L'$, με $KY \parallel LS$ και $K'Y \parallel L'S$, έχουμε ότι τα σημεία S, T και $Q \equiv KL' \cap K'L$, είναι συνευθειακά και άρα, $Q \in (\varepsilon)$ (4)

Ομοίως, από το παραλληλόγραμμο $ATA'N$, όπου $N \equiv AB \cap A'B'$, με $BZ \parallel AT$ και $B'Z \parallel A'T$, έχουμε ότι τα σημεία T, Z και $R \equiv BA' \cap B'A$, είναι συνευθειακά και άρα, $R \in (\varepsilon)$ (5)

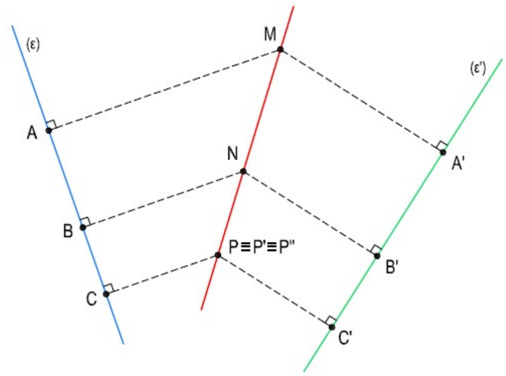
Από (3), (4), (5) $\Rightarrow$ ότι τα σημεία P, Q, R είναι συνευθειακά και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΛΗΜΜΑ 1 (Θεώρημα των Αναλόγων Διαιρέσεων)

Εάν οι προβολές τριών σημείων επί δύο τεμνόμενων ευθειών ορίζουν τμήματα με ίσους λόγους, τότε τα σημεία αυτά ανήκουν στην ίδια ευθεία.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω A, B, C και A', B', C' αντιστοίχως, οι προβολές των σημείων M, N, P, επί των ευθειών (ε) και (ε') και ισχύει $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{A'B'}{B'C'}$ (1)



Δεχόμαστε ότι το σημείο P δεν ανήκει στην ευθεία MN και ας είναι P', P'', τα σημεία στα οποία οι ευθείες $CP, C'P$ τέμνουν την ευθεία MN.

Σύμφωνα με το **θεώρημα Θαλή**, έχουμε:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{MN}{NP'} \quad (2) \quad \text{και} \quad \frac{A'B'}{B'C'}=\frac{MN}{NP''} \quad (3)$$

Από (1), (2), (3) $\Rightarrow NP' \equiv NP'' \Rightarrow P' \equiv P'' \equiv P$

Συνεπάγεται επομένως, ότι το P είναι σημείο της ευθείας MN και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Το ως άνω **Λήμμα 1**, είναι το αντίστροφο της πρότασης όπου ζητείται να αποδειχθεί ότι οι προβολές τριών συνευθειακών σημείων επί δύο τεμνόμενων ευθειών, ορίζουν τμήματα με ίσους λόγους και αποδεικνύεται άμεσα με το **θεώρημα Θαλή**.

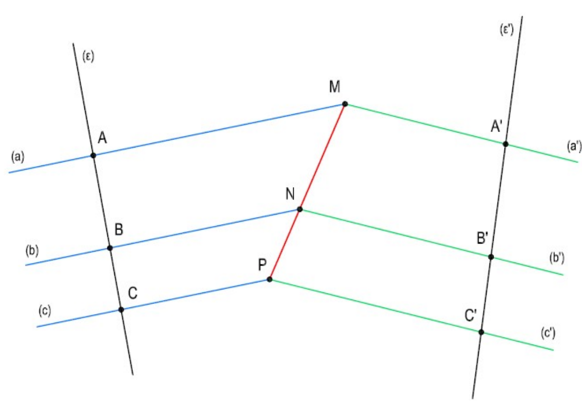
Είναι ένα πρόσθετο (από τα υπάρχοντα στην βιβλιογραφία εν γένει) κριτήριο που αρκεί για να αποδεικνύεται ότι τρία σημεία είναι συνευθειακά, υπάρχει στο βιβλίο ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΙΙ – ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ του Ι. ΙΩΑΝΝΙΔΗ, στην σελίδα 181 (Αυτοέκδοση – Αθήνα 1964) και γενικεύεται ως ακολούθως.

ΛΗΜΜΑ 1 (Θεώρημα των Αναλόγων Διαιρέσεων – Γενίκευση)

Εάν δια τριών σημείων του επιπέδου, δύο τυχούσες δέσμες παραλλήλων ευθειών έχουν ίσους λόγους, τότε τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά.

ΟΡΙΣΜΟΣ

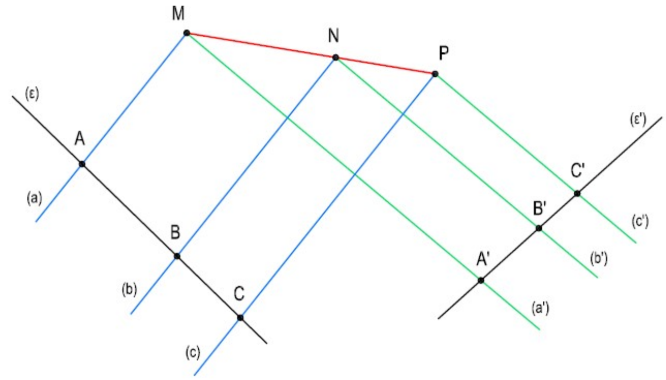
Ονομάζουμε λόγο δέσμης τριών παραλλήλων ευθειών, τον σταθερό λόγο των τμημάτων που ορίζουν τα σημεία τομής των, επί τυχούσας ευθείας η οποία τις τέμνει.



- 'Εστω M, N, P, τρία σημεία του επιπέδου και δύο τυχούσες δέσμες παραλλήλων ευθειών $(a) \parallel (b) \parallel (c)$ και $(a') \parallel (b') \parallel (c')$ δια των σημείων αυτών.

Τυχούσα ευθεία (ε), τέμνει την πρώτη δέσμη στα σημεία A, B, C και τυχούσα επίσης ευθεία (ε'), τέμνει την δεύτερη δέσμη στα σημεία A', B', C'.

Εάν είναι $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{A'B'}{B'C'}$ αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο όπως παραπάνω, ότι τα σημεία M, N, P είναι συνευθειακά.



- Ισχύει και το αντίστροφο.

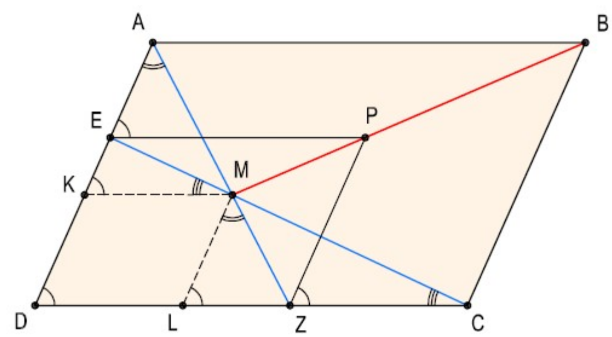
Δύο δέσμες παραλλήλων ευθειών με ίσους λόγους, εάν τέμνονται, τότε τα σημεία τομής των ομολόγων ευθειών τους είναι συνευθειακά.

ΛΗΜΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABCD$ και έστω P, σημείο στο εσωτερικό του. Δια του σημείου P φέρνουμε τις παράλληλες ευθείες προς τις AB, BC αντιστοίχως και έστω E, Z, τα σημεία τομής των με τις πλευρές AD, CD. Αποδείξτε ότι τα σημεία M, P, B είναι συνευθειακά, όπου $M \equiv AZ \bigcap CE$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω K, L, τα σημεία τομής των AD, CD αντιστοίχως, από τις δια του σημείου M παράλληλες ευθείες προς τις AB, BC.



- Από τα όμοια τρίγωνα $\triangle AKM$, $\triangle MLZ$

$$\Rightarrow \frac{AK}{ML}=\frac{MK}{ZL} \Rightarrow (AK)(ZL)=(MK)(ML) \quad (1)$$

Από τα όμοια τρίγωνα $\triangle EKM$, $\triangle MLC$

$$\Rightarrow \frac{CL}{MK}=\frac{ML}{EK} \Rightarrow (CL)(EK)=(MK)(ML) \quad (2)$$

Από (1), (2) $\Rightarrow \dfrac{AK}{EK}=\dfrac{CL}{ZL} \Rightarrow \dfrac{AE}{EK}=\dfrac{CZ}{ZL} \quad (3)$

Από (3), σύμφωνα με το **Λήμμα 1** (γενίκευση), συμπεραίνεται ότι τα σημεία M, P, B ανήκουν στην ίδια ευθεία και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.