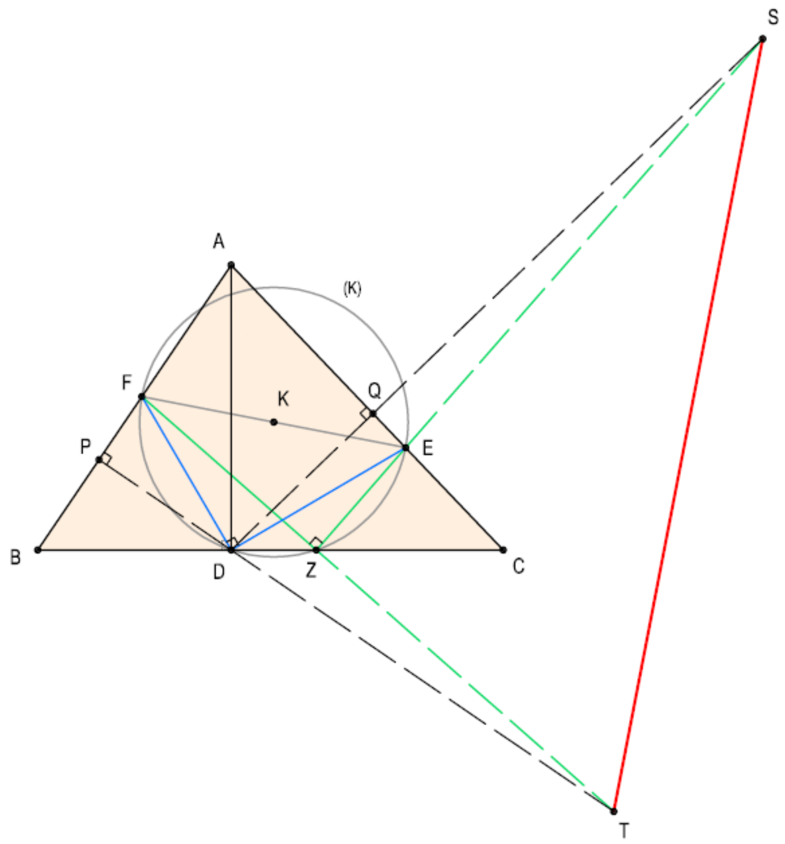
ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΕΥΘΕΙΑ ΔΙΑ ΣΗΜΕΙΟΥ MIQUEL

Δίνεται τρίγωνο $\triangle ABC$ με AD το ύψος του και ας είναι E, F, τυχόντα σημεία επί των πλευρών του AC, AB αντιστοίχως, ώστε να είναι $\angle EDF = 90^o$. Ο περίκυκλος έστω (K) του τριγώνου $\triangle DEF$ τέμνει την πλευρά BC στο σημείο Z και έστω P, Q, οι προβολές του σημείου D, επί των AB, AC, αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι η ευθεία που συνδέει τα σημεία $S \equiv DQ \cap ZE$ και $T \equiv DP \cap ZF$ περνάει από σταθερό σημείο.

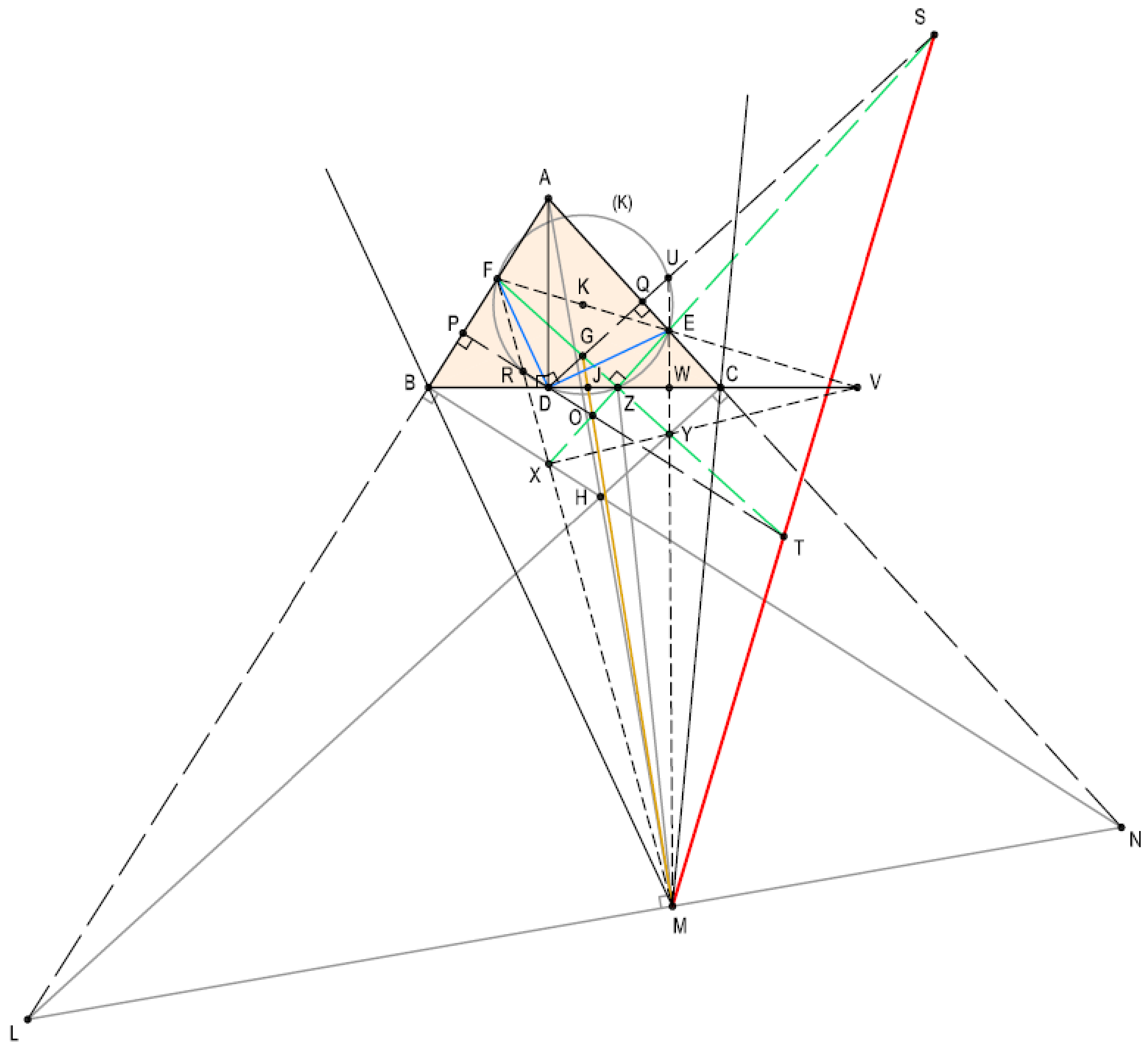


Η πρόταση αυτή και προέκυψε κατά την ατελέσφορη προσπάθεια λύσης άλλου προβλήματος και πρωτοδημοσιεύτηκε στο φόρουμ **mathematica.gr** τον Ιανουάριο του 2020.

https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=185&t=66062

ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΕΥΘΕΙΑ ΔΙΑ ΣΗΜΕΙΟΥ MIQUEL

Δίνεται τρίγωνο $\vartriangle ABC$ με AD το ύψος του και ας είναι $E, F,$ τυχόντα σημεία επί των πλευρών του AC, AB αντιστοίχως, ώστε να είναι $\angle EDF = 90^o$. Ο περίκυκλος έστω (K) του τριγώνου $\vartriangle DEF$ τέμνει την πλευρά BC στο σημείο Z και έστω $P, Q,$ οι προβολές του σημείου $D,$ επί των $AB, AC,$ αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι η ευθεία που συνδέει τα σημεία $S \equiv DQ \bigcap ZE$ και $T \equiv DP \bigcap ZF$ περνάει από σταθερό σημείο.



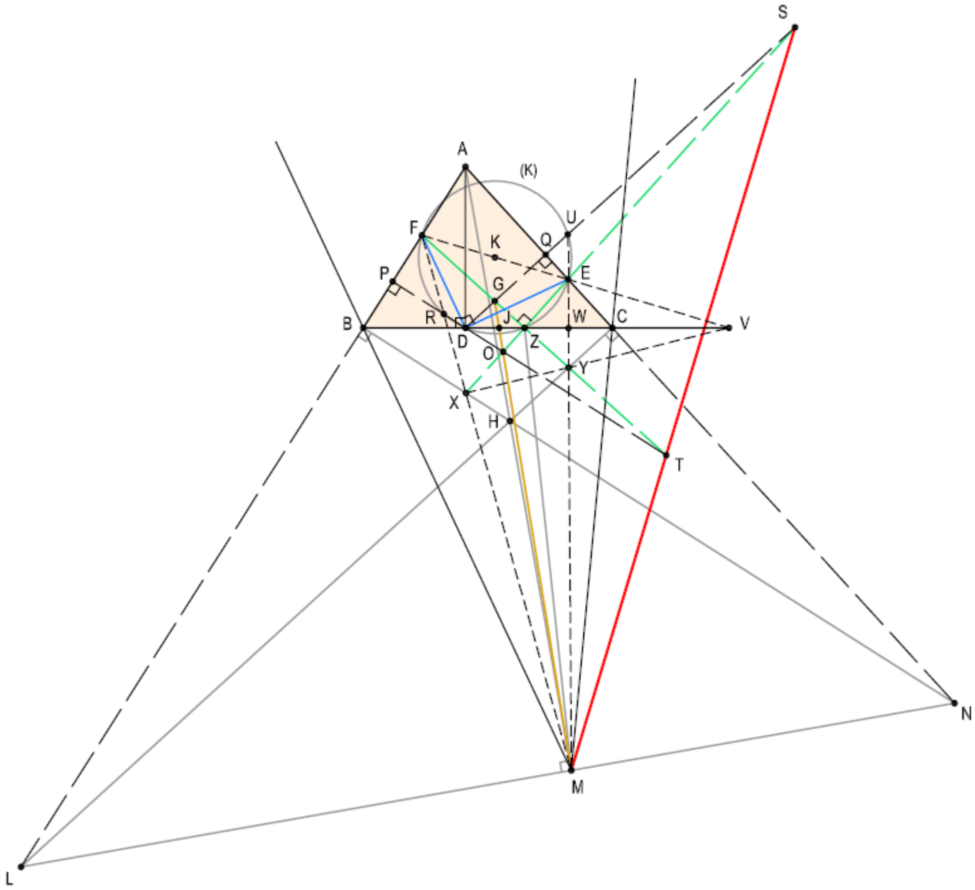
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Οι δια των σημείων B, C κάθετες ευθείες επί των AB, AC αντιστοίχως, τέμνονται στο σημείο H και έστω τα σημεία $L \equiv AB \bigcap CH$ και $N \equiv AC \bigcap BH$.

Το σημείο H ταυτίζεται με το ορθόκεντρο του τριγώνου $\vartriangle ALN$ (προφανές) και έστω τα σημεία $M \equiv LN \bigcap AH$ και $X \equiv BH \bigcap ZE$ και $Y \equiv CH \bigcap ZF$.

Σύμφωνα με το παρακάτω **Λήμμα 1**, έχουμε ότι οι ευθείες FX, EY περνάνε από το σημείο M και έστω τα σημεία $R \equiv (K) \bigcap DP$ και $U \equiv (K) \bigcap DQ$.

Σύμφωνα με το παρακάτω **Λήμμα 2**, έχουμε ότι οι ευθείες FX, EY περνάνε επίσης από τα σημεία R, U, αντιστοίχως.



- Από τα συνευθειακά σημεία $A \equiv BF \bigcap CE$ και $H \equiv BX \bigcap CY$ και $M \equiv FX \bigcap EY$, σύμφωνα με το **Θεώρημα Desarques**, έχουμε ότι τα τρίγωνα $\vartriangle BFX, \vartriangle CEY$ είναι προοπτικά και άρα, προκύπτει:

$$FE \bigcap BC \bigcap XY \equiv V \qquad (1)$$

Από το πλήρες τετράπλευρο $VEZY.FX$ τώρα, έχουμε ότι η σημειοσειρά E, W, Y, M είναι αρμονική, όπου $W \equiv VZ \bigcap EY$.

Από το εγγεγραμμένο στον κύκλο (K) μη κυρτό εξάγωνο $DRFZEU$, σύμφωνα με το **Θεώρημα Pascal**, έχουμε ότι τα σημεία $O \equiv DR \bigcap ZE$ και $M \equiv RF \bigcap EU$ και $G \equiv FZ \bigcap UD$ είναι συνευθειακά.

- Η δέσμη $Z.EWYM$ είναι αρμονική, λόγω της αρμονικής σημειοσειράς E, W, Y, M.

Η δέσμη αυτή τέμνεται από την ευθεία GM και άρα, η σημειοσειρά G, J, O, M είναι αρμονική, όπου $J \equiv GO \bigcap DZ$.

Συμπεραίνεται έτσι, ότι στο πλήρες τετράπλευρο $DGZO.ST$, η ευθεία που συνδέει τα σημεία S, T της εκφώνησης (= σημεία τομής των ευθειών των απέναντι πλευρών του $DGZO$), περνάει από το σταθερό σημείο M, ως το αρμονικό συζυγές του J, ως προς τα σημεία G, O και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

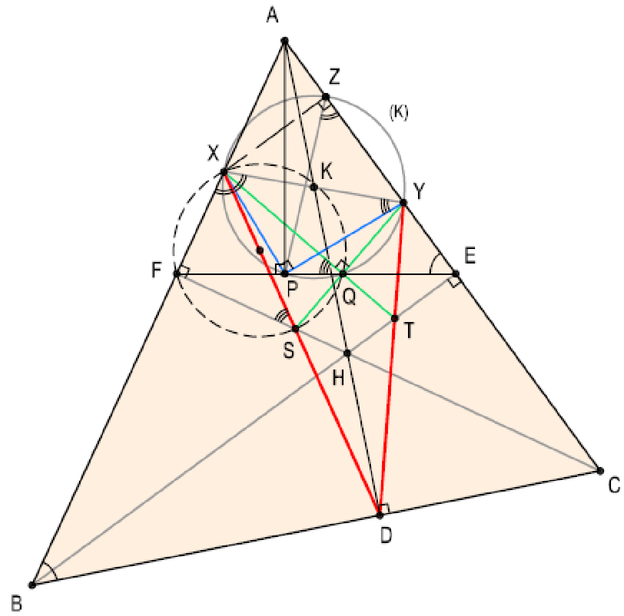
Το ως άνω σταθερό σημείο M, ταυτίζεται ως γνωστό με το **Σημείο Miquel**, όσον αφορά στο πλήρες τετράπλευρο $ABHC.LN$.

ΛΗΜΜΑ 1

Δίνεται τρίγωνο $\vartriangle ABC$ με AD, BE, CF τα ύψη του και ας είναι P, η προβολή του A επί της EF. Έστω τα τυχόντα σημεία $X \in AF$ και $Y \in AE$, ώστε να είναι $\angle XPY = 90^0$ και έστω Q, το σημείο τομής της EF από τον περίκυκλο έστω (K) του τριγώνου $\vartriangle PXY$. Αποδείξτε ότι οι ευθείες XS, YT περνάνε από το σημείο D, όπου $S \equiv CF \bigcap QY$ και $T \equiv BE \bigcap QX$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ορίζουμε το σημείο S, ως το σημείο τομής της CF από την ευθεία XD και αρκεί ως ισοδύναμο ζητούμενο να αποδειχθεί ότι τα σημεία S, Q, Y είναι συνευθειακά και ομοίως ότι τα σημεία T, Q, X ότι είναι συνευθειακά, όπου $T \equiv BE \bigcap DY$.



- Έστω το σημείο $Z \equiv AC \bigcap (K)$ το διάφορο του Y και από το εγγράψιμο τετράπλευρο $PXZY$ με $\angle XPY = 90^0 \Rightarrow XZ \perp AC$ (1)

Από (1) και $BE \perp AC \Rightarrow XZ \parallel BE$ (2)

Από (2) $\Rightarrow \dfrac{AZ}{ZE} = \dfrac{AX}{XB}$ και άρα, στα όμοια ορθογώνια τρίγωνα $\vartriangle PAE$, $\vartriangle DAB$, λόγω $\angle AEP = \angle ABD$, έχουμε $\angle PZE = \angle DXB$ (3)

Από (3) και $\angle PZE \equiv \angle PZY = \angle PXY \Rightarrow \angle PXY = \angle DXB \equiv \angle FXS$ (4)

Από (4) έχουμε ότι τα ορθογώνια τρίγωνα $\vartriangle PXY$, $\vartriangle FXS$ είναι όμοια και άρα, ισχύει:

$$\angle PYX = \angle FSX \qquad (5)$$

Από (5) και $\angle PYX = \angle PQX \Rightarrow \angle FSX = \angle PQX \equiv \angle FQX$ (6)

Από (6) έχουμε ότι το τετράπλευρο $FSQX$ είναι εγγράψιμο και άρα, ισχύει $\angle XQS = 90^0$ (7)

Από (7) και $\angle XQY = 90^0$, συμπεραίνεται ότι τα σημεία S, Q, Y είναι συνεθειακά και ομοίως για τα σημεία T, Q, X και τα ισοδύναμο ζητούμενο για το **Λήμμα 1**, έχει αποδειχθεί.

ΛΗΜΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $\triangle ABC$ με AD το ύψος του και ας είναι E, F, τυχόντα σημεία επί των πλευρών του AC, AB αντιστοίχως, ώστε να είναι $\angle EDF = 90^o$. Ο περίκυκλος έστω (K) του τριγώνου $\triangle DEF$ τέμνει την πλευρά BC στο σημείο Z και ας είναι S, η προβολή του D επί της AB. Η δια του σημείου B κάθετη ευθεία επί την AB τέμνει την ευθεία EZ στο σημείο έστω Q. Αποδείξτε ότι τα σημεία F, P, Q είναι συνευθειακά, όπου $P \equiv (K) \cap DS$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Από $\angle FBQ = 90^0 = \angle FZQ$, έχουμε ότι το τετράπλευρο $BFZQ$ είναι εγγράψιμο και άρα, ισχύει $\angle ZFQ = \angle ZBQ$ (1)

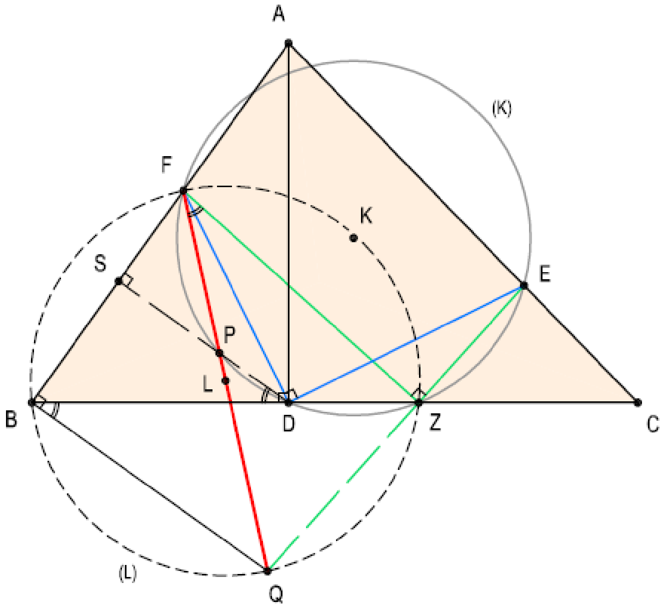
Από $DP \parallel BQ \Rightarrow \angle ZBQ = \angle PDB$ (2)

Από (1), (2) $\Rightarrow \angle ZFQ = \angle PDB$ (3)

Από (3) και $\angle ZFP = \angle PDB$, λόγω του εγγραψίμου τετραπλεύρου $DZFP$, έχουμε

$$\angle ZFQ = \angle ZFP \qquad (4)$$

Από (4) συμπεραίνεται ότι τα σημεία F, P, Q, είναι συνευθειακά και το **Λήμμα 2** έχει αποδειχθεί.



ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Μία άλλη απόδειξη της πρότασης, δημοσιευμένη από τον **Μίνο Μαργαρίτη**, θα βρει ο αναγνώστης στον ίδιο ως άνω σύνδεσμο του **mathematica.gr**.

https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=185&t=66062