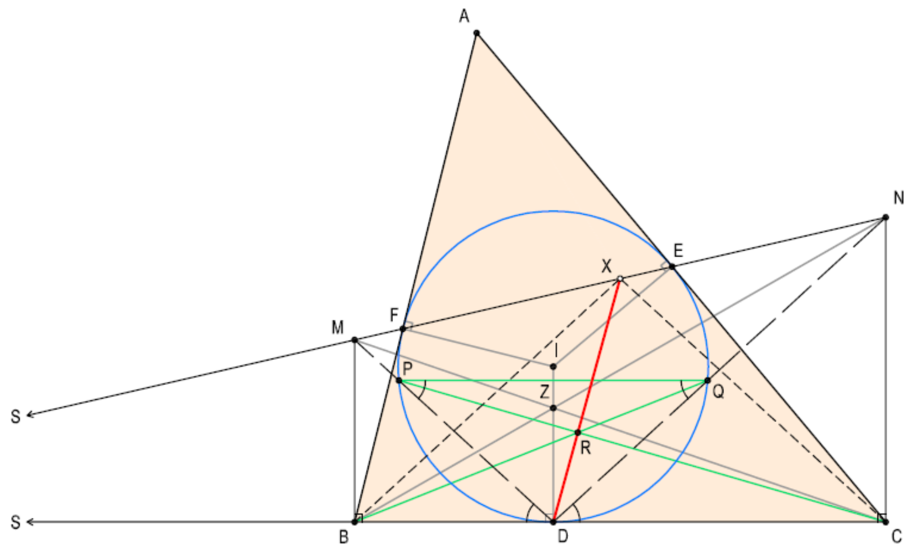
Crux Mathematicorum – PROBLEM 4277

Δίνεται τρίγωνο $\triangle ABC$ και έστω D, E, F, τα σημεία επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου του (I), με τις πλευρές BC, AC, AB, αντιστοίχως. Οι δια των σημείων B, C κάθετες ευθείες επί της BC, τέμνουν την ευθεία EF στα σημεία M, N αντιστοίχως και έστω τα σημεία $P \equiv (I) \cap DM$ και $Q \equiv (I) \cap DN$. Αποδείξτε ότι η ευθεία DR περνάει από το μέσον X του τμήματος MN, όπου $R \equiv BQ \cap CP$.



Έστω το σημείο $S \equiv BC \cap EF$ και έχουμε ότι η σημειοσειρά $S, B, D, C,$ είναι αρμονική.

Γνωστό αποτέλεσμα το οποίο προκύπτει άμεσα από το πλήρες τετράπλευρο $AEG'FBC$, όπου $G' \equiv AD \cap BE \cap CF$ (δεν εμφανίζεται στο σχήμα), ως το **Σημείο Gergonne** του $\triangle ABC$.

Έτσι, από $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{SB}{SC} = \dfrac{BM}{CN}$ προκύπτει ότι τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle BDM$, $\triangle CDN$ είναι όμοια και επομένως, ισχύει $\angle BDM = \angle CDN$ (1)

Από (1) και $\angle BDM = \angle DQP$ και $\angle CDN = \angle DPQ \Rightarrow \angle DQP = \angle DPQ$ (2)
και προφανώς ισχύει $PQ \parallel BC$ (3)

Έστω το σημείο $Z \equiv BN \cap CM$ και από την αρμονική σημειοσειρά $S, B, D, C,$ στο τραπέζιο $BCNM$ έχουμε ότι το σημείο αυτό ανήκει στην ευθεία $ID \perp BC$, λόγω $BM \parallel ZD \parallel CN \Rightarrow ZD \perp BC$.

$$\text{Από } (3) \Rightarrow \frac{RQ}{RB} = \frac{RP}{RC} \qquad (4)$$

Από (4), σύμφωνα με το **Θεώρημα θαλή**, προκύπτει άμεσα ότι οι δια των σημείων B, C παράλληλες ευθείες προς τις DN, DM αντιστοίχως, τέμνουν την ευθεία DR στο ίδιο σημείο , έστω το X.

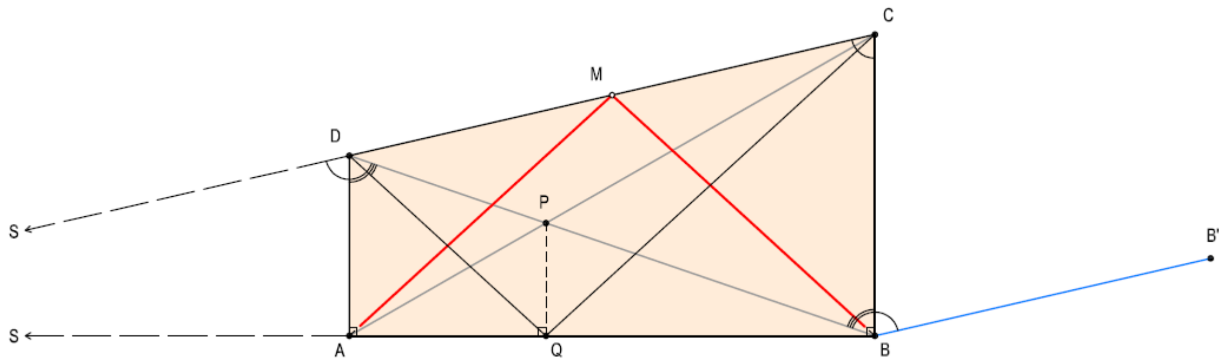
Αλλά, σύμφωνα με το παρακάτω **Λήμμα**, οι ίδιες ευθείες περνάνε από το μέσον του τμήματος MN.

Συμπεραίνεται έτσι, ότι το X ταυτίζεται με το μέσον του MN και η πρόταση έχει αποδειχθεί.

• Η απόδειξη αυτή είναι αφιερωμένη σε ένδειξη τιμής, στον **Παναγιώτη Χρονόπουλο**.

ΛΗΜΜΑ

Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $ABCD$ με $AD \parallel BC$ και $\angle A = 90^o = \angle B$ και ας είναι $AD < BC$. Έστω το σημείο $P \equiv AC \bigcap BD$ και ας είναι Q, η προβολή του P επί της AB. Αποδείξτε ότι οι δια των σημείων A, B παράλληλες ευθείες προς τις QC, QD αντιστοίχως, περνάνε από το μέσον M της CD.



Ορίζουμε το M, ως το σημείο τομής της CD από την δια του B παράλληλη ευθεία προς την DQ και αρκεί να αποδειχθεί ότι το σημείο αυτό ταυτίζεται με το μέσον της CD.

Έστω το σημείο $S \equiv AB \bigcap CD$ και από $AD \parallel PQ \parallel BC \Rightarrow \dfrac{QA}{QB} = \dfrac{AP}{PC} = \dfrac{AD}{BC} = \dfrac{SA}{SB}$ (1)

Από (1) έχουμε ότι η σημειοσειρά S, A, Q, B είναι αρμονική.

Έστω B', τυχόν σημείο προς το μέρος της BC που δεν κείται το A, ώστε να είναι $BB' \parallel CD$.

Παρατηρούμε ότι στις δέσμες $D.BQAS, B.DMCB'$, οι γωνίες που σχηματίζονται από τις ομόλογες ακτίνες τους είναι ίσες ($\angle BDQ = \angle DBM$ και $\angle QDA = \angle MBC$ και $\angle ADS = \angle BCD = \angle CBB'$) και επομένως, οι δέσμες αυτές έχουν ίσους **Διπλούς λόγους**.

Επειδή τώρα, η δέσμη $D.BQAS$ είναι αρμονική, λόγω της αρμονικής σημειοσειράς S, A, Q, B (ή ισοδύναμα B, Q, A, S), προκύπτει ότι και η δέσμη $B.DMCB'$ είναι επίσης αρμονική.

Τέλος, από την αρμονική δέσμη $B.DMCB'$ με $CD \parallel BB'$ συμπεραίνεται ότι $MC = MD$ (2)

Ομοίως, αποδεικνύεται ότι και η δια του σημείου A παράλληλη ευθεία προς την QC περνάει από το μέσον της M της CD και το **Λήμμα** έχει αποδειχθεί.

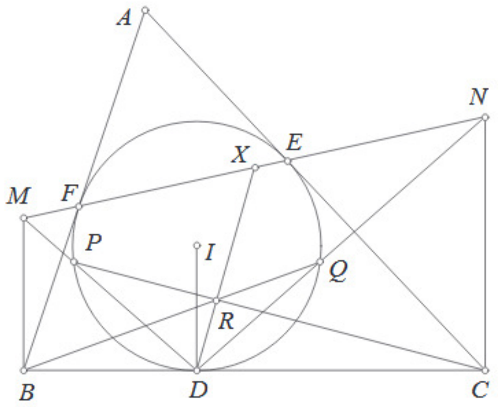
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ.

(1) – Η πρόταση αυτή οφείλεται στον **Tran Quang Hung**, εξαίρετο γεωμέτρη από το Βιετνάμ που ζει και δημιουργεί στο Ανόϊ, όντας δάσκαλος σε ειδικό σχολείο για ταλαντούχους μαθητές (υπήρξε και ο ίδιος μαθητής σ' αυτό το σχολείο) στο Πανεπιστήμιο. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης θα βρει πλούσιο υλικό προβλημάτων Γεωμετρίας, στην προσωπική του ιστοσελίδα.
https://analgeomatica.blogspot.com/2019/03/about-my-problem-on-crux-math.html?fbclid=IwAR2Tb3xmPlxKmaoPNGQFnwXArj3a9jWB6SJyzZShhnMwt7J4PpMn2IHfJ1U

(2) - Η ίδια πρόταση έχει δημοσιευτεί ως **PROBLEM 4277**, στο ηλεκτρονικό περιοδικό **Crux Mathematicorum** της Καναδικής Μαθηματικής Εταιρείας (volume 43 8 Oct. 2017).

4277. *Proposed by Tran Quang Hung and Nguyen Le Phuoc.*

Let ABC be a triangle whose incircle (I) touches BC, CA and AB at D, E and F, respectively. Suppose M and N lie on EF such that BM and CN are perpendicular to BC. Finally, suppose DM and DN intersect (I) again at P and Q, respectively, and that BQ cuts CP at R. Prove that DR bisects MN.



All six submissions that we received were correct; we feature the solution by AN-Anduud Problem Solving Group.

(3) Την πρόταση επανέφερε στο προσκήνιο, δημοσιεύοντας μία άλλη συνθετική απόδειξη στην ιστοσελίδα του ο **Lean-Louis AYME**, ζωντανός θρύλος της Γεωμετρίας, όπως τον αναφέρει ο **Παναγιώτης Χρονόπουλος** σε σχόλιό του στην διαδικτυακή ομάδα **Romantics in Geometry**, όπου ανέβασε επίσης την ίδια πρόταση ως **ΑΣΚΗΣΗ 2858**.

http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/Docs/Crux%20Mathematicorum%20Problem%204277.pdf

https://www.facebook.com/groups/parmenides52/permalink/2120982088015486/