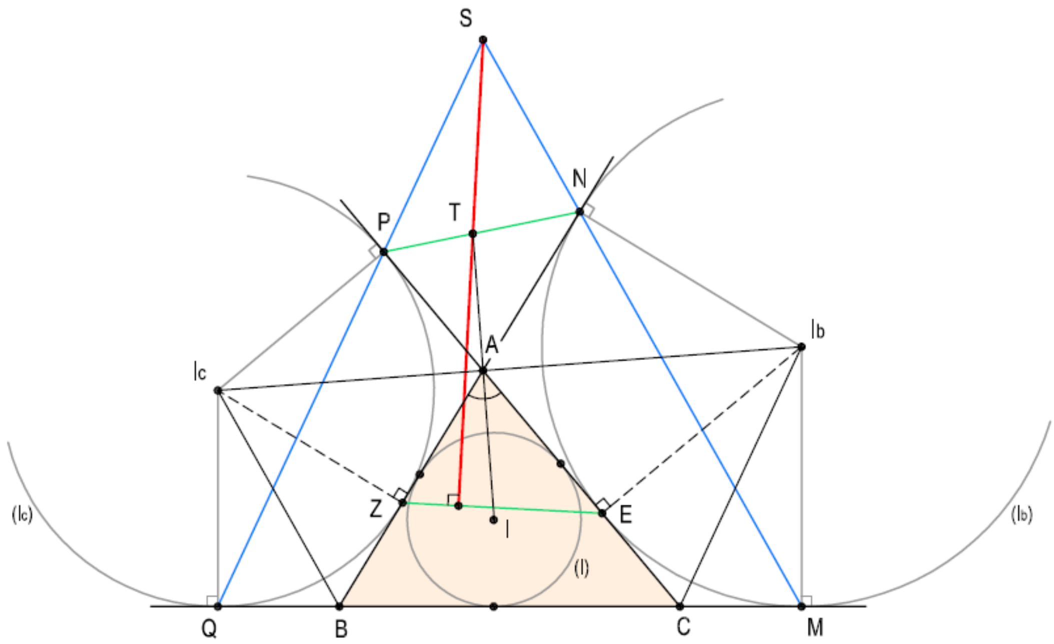
ΠΑΡΑΚΥΚΛΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑ

Ο $B-$παράκυκλος (I_b) δοσμένου τριγώνου $\triangle ABC$, εφάπτεται των ευθειών των πλευρών του BC, AC, AB, στα σημεία M, E, N αντιστοίχως και ο $C-$παράκυκλος (I_c), εφάπτεται των ευθειών BC, AB, AC, στα σημεία Q, Z, P, αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι $ST \perp EZ$, όπου $S \equiv MN \cap PQ$ και $T \equiv PN \cap IA$, με I το έγκεντρο του $\triangle ABC$.



Η πρόταση αυτή έχει δημοσιευτεί παλιότερα στο φόρουμ **mathematica.gr**.

https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=185&t=62160

Στον σύνδεσμο αυτόν, εκτός από την απόδειξη της πρότασης που εμφανίζεται εδώ, ο αναγνώστης θα βρει επίσης μία άλλη απόδειξη που οφείλεται στον **Στάθη Κούτρα**, καθώς και εναλλακτικές προσεγγίσεις που οφείλονται στον **Μίνο Μαργαρίτη**, (*) για το **Λήμμα 1** και την **βοηθητική πρόταση**.

(*) Ο Μίνος Μαργαρίτης είναι ταλαντούχος μαθητής Λυκείου, που ζει και δημιουργεί στο Ηράκλειο Κρήτης. Δυνατός λύτης γεωμετρικών προβλημάτων και μέλος της ελληνικής ομάδας συμμετοχής στην Βαλκανιάδα και στην Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα, για το έτος 2019.

Θα αποδειχθεί πρώτα η ακόλουθη βοηθητική πρόταση :

ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ

Δίνεται τρίγωνο $\triangle ABC$ και έστω $D, E,$ τυχόντα σημεία επί της πλευράς BC ώστε να είναι $BD = CE$ και ας είναι το σημείο D μεταξύ των B, E. Οι δια των σημείων D, E κάθετες ευθείες επί την BC, τέμνουν τις πλευρές AB, AC στα σημεία F, Z αντιστοίχως και ας είναι F', το συμμετρικό σημείο του F ως προς την ευθεία BC. Η δια του σημείου έστω $Q \equiv BC \cap ZF'$ κάθετη ευθεία επί την BC, τέμνει την FZ στο σημείο έστω R. Αποδείξτε ότι τα σημεία A, R και $P \equiv BZ \cap CF$ είναι συνευθειακά.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για να είναι τα σημεία A, R, P συνευθειακά αρκεί, σύμφωνα με το **θεώρημα Μενελάου**, να αποδειχθεί ότι :

$$\frac{RZ}{RF}\cdot\frac{PF}{PC}\cdot\frac{AC}{AZ} = 1 \qquad (1)$$

- Στο τραπέζιο $DEZF$, από $DF \parallel QR \parallel EZ$ έχουμε :

$$\frac{RZ}{RF} = \frac{QE}{QD} \qquad (2)$$

- Στο τρίγωνο $\triangle CDF$, από $DF \parallel TP$ έχουμε :

$$\frac{PF}{PC} = \frac{TD}{TC} \qquad (3)$$

όπου T είναι η προβολή του P επί της BC.

- Στο τρίγωνο $\triangle CSA$, από $SA \parallel EZ$ έχουμε :

$$\frac{AC}{AZ} = \frac{SC}{SE} \qquad (4)$$

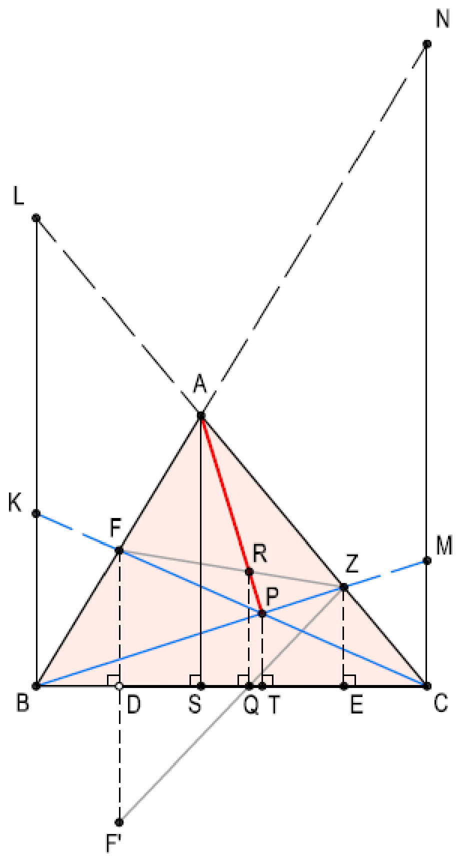
όπου S είναι η προβολή του A επί της BC.

- Σύμφωνα με το παρακάτω **Λήμμα 1**, έχουμε :

$$TD = SE \qquad (5)$$

Από $(1), (2), (3), (4), (5),$ αρκεί να αποδειχθεί ότι ισχύει :

$$\frac{QE}{QD} = \frac{CT}{CS} \qquad (6)$$

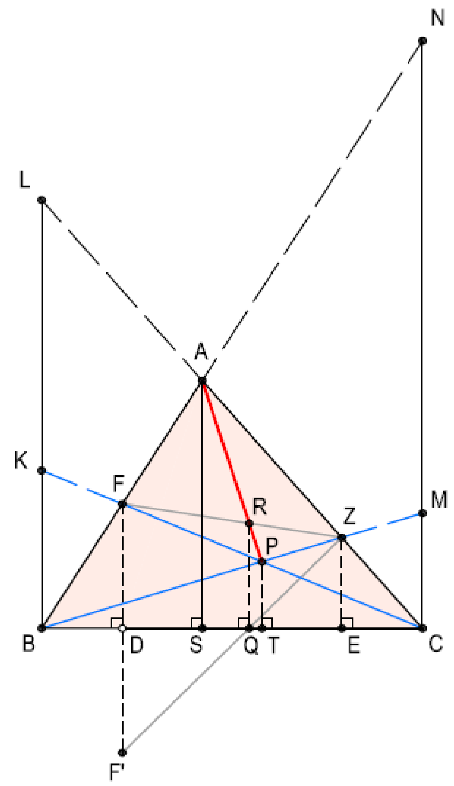


Αλλά, ισχύει $\dfrac{QE}{QD} = \dfrac{EZ}{DF'} = \dfrac{EZ}{DF}$ (7) λόγω $DF' = DF$ και άρα, από $(6), (7),$ αρκεί $\dfrac{EZ}{DF} = \dfrac{CT}{CS}$ (8)

Ισχύει : $\dfrac{CT}{CD} = \dfrac{TP}{DF}$ (9) και $\dfrac{CS}{CE} = \dfrac{SA}{EZ}$ (10) και από $(9), (10) \Rightarrow \dfrac{CT}{CS}\cdot\dfrac{CE}{CD} = \dfrac{TP}{SA}\cdot\dfrac{EZ}{DF}$ (11)

Από $(8), (11),$ αρκεί να αποδειχθεί ότι ισχύει $\dfrac{TP}{SA} = \dfrac{CE}{CD} = \dfrac{BD}{CD}$ (12) λόγω $CE = BD$.

• Η δια του σημείου B κάθετη ευθεία επί την BC, τέμνει τις ευθείες CF, CA στα σημεία έστω K, L αντιστοίχως και η δια του σημείου C κάθετη ευθεία επί την BC τέμνει τις ευθείες BZ, BA, στα σημεία M, N, αντιστοίχως.



Έτσι έχουμε $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{BF}{FN} = \dfrac{BK}{CN}$ (13) και ομοίως

$\dfrac{TP}{BK} = \dfrac{CT}{CB}$ (14) και $\dfrac{SA}{CN} = \dfrac{BS}{BC}$ (15)

Από (14), (15) $\Rightarrow$ $\dfrac{TP}{SA} \cdot \dfrac{CN}{BK} = \dfrac{CT}{CB} \cdot \dfrac{BC}{BS}$ (16)

Από (16) $\Rightarrow$ $\dfrac{TP}{SA} = \dfrac{BK}{CN}$ (17) λόγω $CT = BS$.

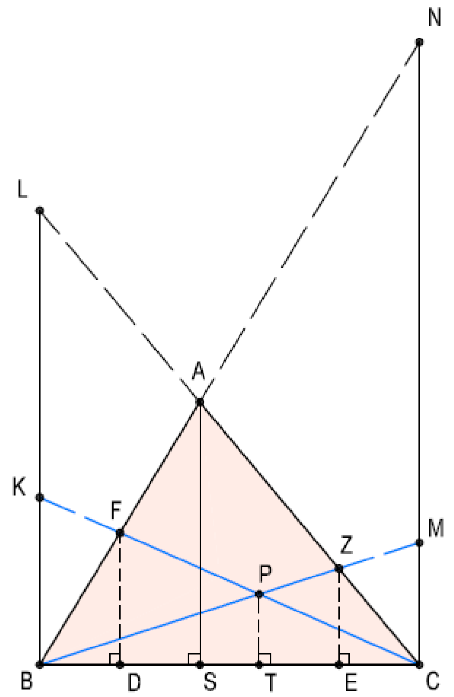
Από (13), (17) $\Rightarrow$ (12) και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΛΗΜΜΑ 1

Δίνεται τρίγωνο $\triangle ABC$ και έστω D, E, τυχόντα σημεία επί της πλευράς BC ώστε να είναι $BD = CE$ και ας είναι το σημείο D μεταξύ των B, E. Οι δια των σημείων D, E κάθετες ευθείες επί την BC, τέμνουν τις πλευρές AB, AC στα σημεία F, Z αντιστοίχως και έστω το σημείο $P \equiv BZ \cap CF$. Αποδείξτε ότι $BS = CT$, όπου S, T είναι οι προβολές των σημείων A, P επί της BC, αντιστοίχως.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

• Η δια του σημείου B κάθετη ευθεία επί την BC, τέμνει τις ευθείες CF, CA στα σημεία έστω K, L αντιστοίχως και η δια του σημείου C κάθετη ευθεία επί την BC τέμνει τις ευθείες BZ, BA, στα σημεία M, N, αντιστοίχως.



Από $BK \parallel DF \parallel CN$ $\Rightarrow$ $\dfrac{BK}{CN} = \dfrac{BF}{FN} = \dfrac{BD}{DC}$ (1)

Από $BL \parallel EZ \parallel CM$ $\Rightarrow$ $\dfrac{CM}{BL} = \dfrac{CZ}{ZL} = \dfrac{CE}{EB}$ (2)

Από (1), (2) $\Rightarrow$ $\dfrac{BK}{CN} = \dfrac{CM}{BL}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{BK}{CM} = \dfrac{CN}{BL}$ (3)

λόγω $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{CE}{EB}$

• Από $BK \parallel TP \parallel CM$ $\Rightarrow$ $\dfrac{BK}{CM} = \dfrac{BP}{PM} = \dfrac{BT}{TC}$ (4)

Από $BL \parallel SA \parallel CN$ $\Rightarrow$ $\dfrac{CN}{BL} = \dfrac{AN}{AB} = \dfrac{CS}{SB}$ (5) και από (3), (4), (5) $\Rightarrow$ $\dfrac{BT}{TC} = \dfrac{CS}{SB}$ (6)

Από (6) $\Rightarrow \dfrac{BT+TC}{TC}=\dfrac{CS+SB}{SB} \Rightarrow \dfrac{BC}{CT}=\dfrac{BC}{SB} \Rightarrow BS=CT$ (6) και το **Λήμμα 1** έχει αποδειχθεί.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

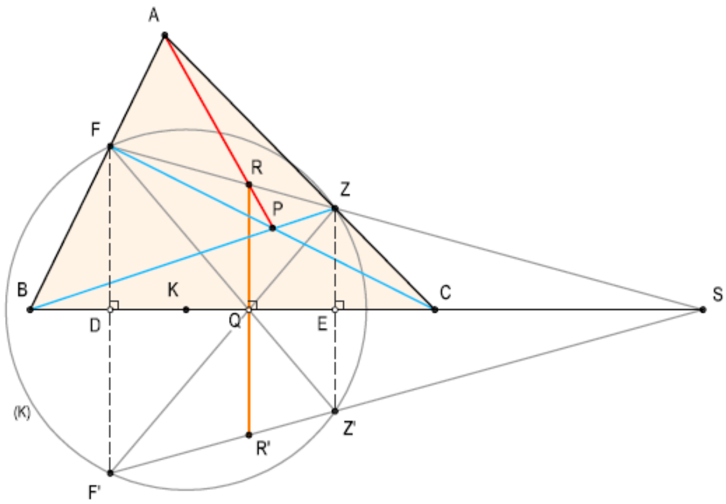
Η ως άνω εκτεταμένη απόδειξη της βοηθητικής πρότασης, παρουσιάζεται όπως ακριβώς προέκυψε κατά την προσπάθεια λύσης του αρχικού προβλήματος.

Όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, στην συζήτηση που έγινε στο φόρουμ **mathematica.gr** ο νταλαντούχος μαθητής **Μίνος Μαργαρίτης,** μας έδωσε μία κομψή και σύντομη απόδειξη που αφορά στην γενίκευση της βοηθητικής πρότασης, η οποία περιγράφεται παρακάτω.

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΗΣ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΤΑΣΗΣ

Δίνεται τρίγωνο $\triangle ABC$ και έστω $D,E,$ τυχόντα σημεία επί της πλευράς BC και ας είναι το σημείο D μεταξύ των $B,E.$ Οι δια των σημείων D,E κάθετες ευθείες επί την $BC,$ τέμνουν τις πλευρές AB,AC στα σημεία F,Z αντιστοίχως και ας είναι $F',$ το συμμετρικό σημείο του F ως προς την ευθεία $BC.$ Η δια του σημείου έστω $Q\equiv BC\cap ZF'$ κάθετη ευθεία επί την $BC,$ τέμνει την FZ στο σημείο έστω $R.$ Αποδείξτε ότι τα σημεία A,R και $P\equiv BZ\cap CF$ είναι συνευθειακά.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Έστω $Z',$ το συμμετρικό σημείο του Z ως προς την ευθεία BC και έχουμε ότι τα σημεία $F,$ $Q,$ Z' είναι συνευθειακά.

Το τετράπλευρο $FF'Z'Z$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και άρα, εγγράψιμο σε κύκλο έστω $(K).$

Η ευθεία $RR',$ όπου $R'\equiv F'Z'\cap RQ,$ ταυτίζεται με την Πολική ευθεία του σημείου S ως προς τον κύκλο $(K),$ όπου $S\equiv FZ\cap BC\cap F'Z'$ και επομένως, η σημειοσειρά F,R,Z,S είναι αρμονική.

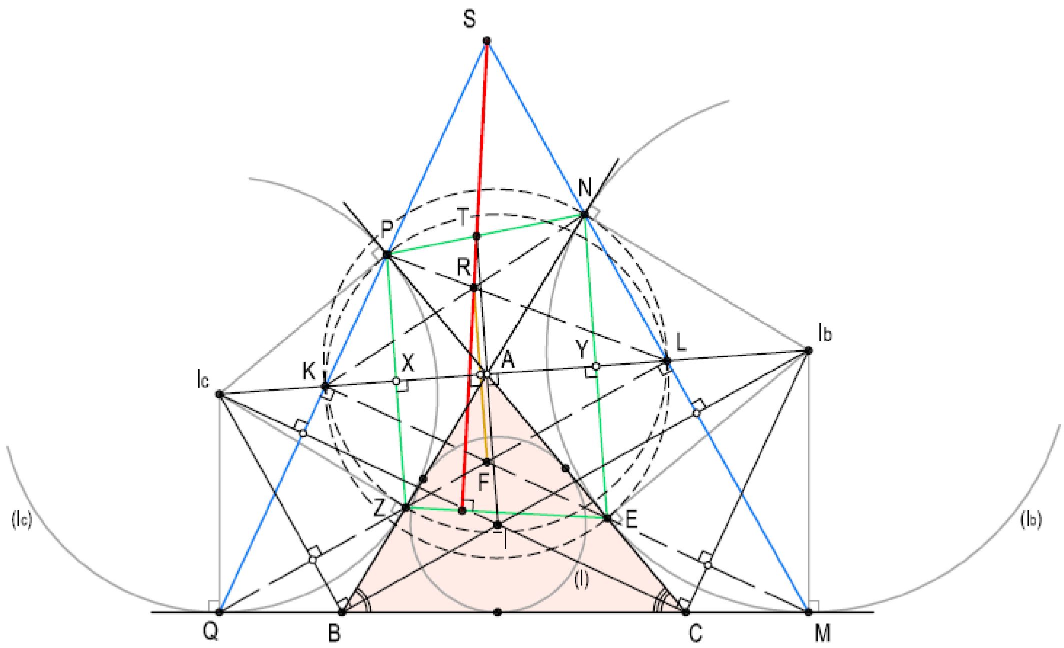
Στο πλήρες τετράπλευρο $AFPZ.BC$ τώρα, συμπεραίνεται ότι η διαγώνιά του AP περνάει από το σημείο $R,$ αρμονικό του S ως προς τα σημεία $F,$ Z και η **βοηθητική πρόταση** έχει αποδειχθεί.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Είναι προφανές ότι για την απόδειξη του αρχικού προβλήματος που ακολουθεί στα επόμενα, υιοθετείται η ως άνω απόδειξη της **βοηθητικής πρότασης**, αντί της προηγηθείσας με την μακροσκελή τεκμηρίωση, η οποία παρουσιάζεται εδώ μόνο για την καταγραφή του τρόπου με τον οποίο προσεγγίστηκε και επιλύθηκε το ζητούμενο της καθετότητας.

ΠΑΡΑΚΥΚΛΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑ

Ο $B-$παράκυκλος (I_b) δοσμένου τριγώνου $\vartriangle ABC$, εφάπτεται των ευθειών των πλευρών του BC, AC, AB, στα σημεία M, E, N αντιστοίχως και ο $C-$παράκυκλος (I_c), εφάπτεται των ευθειών BC, AB, AC, στα σημεία Q, Z, P, αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι $ST \perp EZ$, όπου $S \equiv MN \cap PQ$ και $T \equiv PN \cap IA$, με I το έγκεντρο του $\vartriangle ABC$.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Έστω τα σημεία $K \equiv PQ \cap ME$ και $L \equiv MN \cap QZ$.

Στο ορθογώνιο τραπέζιο QMI_bI_c από $QK \parallel CI_b$ και $MK \parallel CI_c$, σύμφωνα με το παρακάτω γνωστό **Λήμμα 2**, προκύπτει ότι το σημείο K ανήκει στην ευθεία I_bI_c και ομοίως για το σημείο L, λόγω $QL \parallel BI_b$ και $ML \parallel BI_c$.

Από $\angle EKP = \angle I_bCI_c = 90^\circ$ έχουμε ότι το σημείο K ανήκει επίσης στον κύκλο με διάμετρο EP και ομοίως, το σημείο L ανήκει επίσης στον κύκλο με διάμετρο ZN, λόγω $\angle ZLN = \angle I_bBI_c = 90^\circ$.

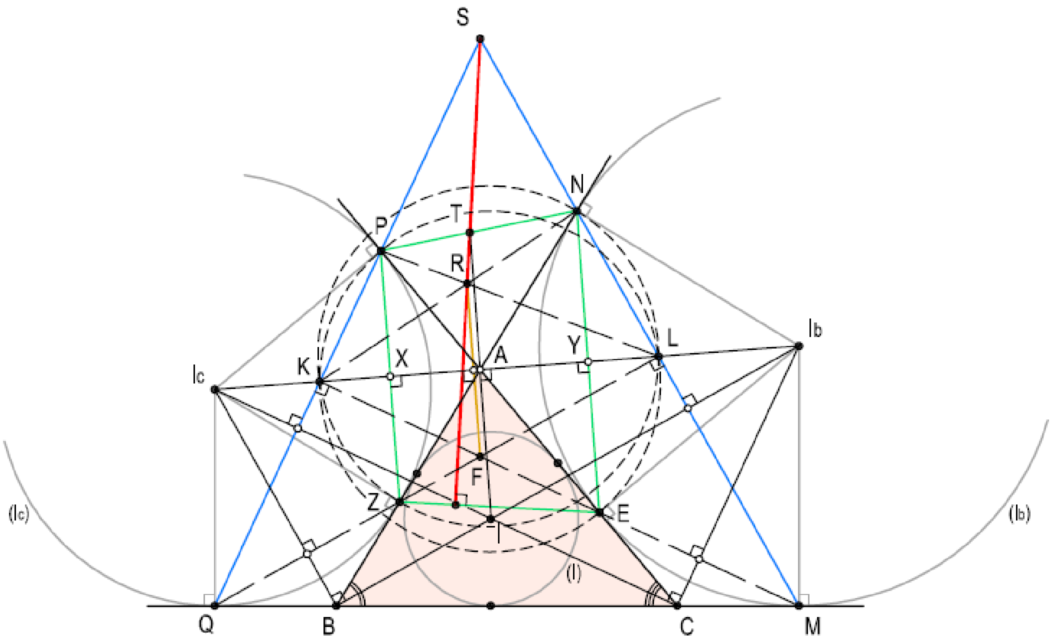
Από το ισοσκελές τραπέζιο $EZPN$ έχουμε ότι οι ως άνω κύκλοι διαμέτρων $EP = ZN$ τέμνουν την ευθεία I_bI_c, κοινή μεσοκάθετη ευθεία των βάσεών του EN, ZP στα ίδια σημεία, λόγω συμμετρίας (των διαμέτρων) ως προς την ευθεία I_bI_c και επομένως, τα σημεία K και L ανήκουν και στους δύο ως άνω κύκλους.

- Έστω τα σημεία $X \equiv KL \cap ZP$ και $Y \equiv KL \cap EN$.

Από τα ομοκυκλικά σημεία K, Z, L, N τώρα (ομοίως από τα ομοκυκλικά K, E, L, P), εύκολα προκύπτει ότι $KX = YL$, λόγω των παραλλήλων ευθειών $EN \parallel ZP$ από τα άκρα της διαμέτρου EP ή ZN του αντίστοιχου κύκλου.

Έχουμε διαμορφώσει έτσι, το τρίγωνο $\vartriangle SKL$ με $KX = YL$ και σύμφωνα με την **βοηθητική πρόταση** που είδαμε στα προηγούμενα, τα σημεία S, T και $R \equiv KN \cap LP$ είναι συνευθειακά.

Έστω το σημείο $F \equiv EK \cap ZL$ και λόγω της συμμετρίας του εξαγώνου $KZELNP$ ως προς την ευθεία KL, έχουμε ότι τα σημεία R, F είναι συμμετρικά ως προς την KL και άρα, τα τρίγωνα $\vartriangle RPN$, $\vartriangle FZE$ είναι συμμετρικά ως προς την ίδια ευθεία και επομένως, ως ειδική περίπτωση αντιρρόπως ομοίων τριγώνων, είναι ορθολογικά σύμφωνα με το παρακάτω **Λήμμα 3**.



Από την ορθολογικότητα των ως άνω τριγώνων τέλος και επειδή το σημείο S ταυτίζεται με το σημείο τομής των δια των κορυφών P, N του τριγώνου $\vartriangle RPN$ καθέτων ευθειών, επί των ευθειών των πλευρών FE, FZ του τριγώνου $\vartriangle FZE$ αντιστοίχως, συμπεραίνεται ότι η ευθεία $ST \equiv SR$ είναι κάθετη επί την EZ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

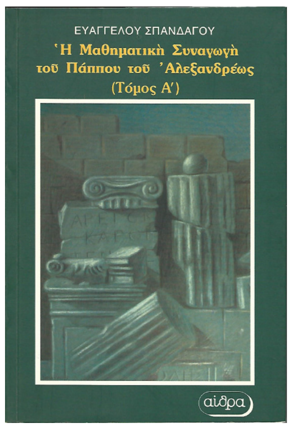
- Η απόδειξη αυτή είναι αφιερωμένη σε ένδειξη τιμής, στον **Μίνο Μαργαρίτη**.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Με εναλλακτική εκφώνηση ακολουθεί στα επόμενα η απόδειξη για το γνωστό **Λήμμα 2**, το οποίο σε μία δημοσίευση στο φόρουμ **AoPS,** αναφέρεται ως **Μικρό θεώρημα Πάππου** και δεν το γνώριζα.

https://artofproblemsolving.com/community/c6h603922_parallel_and_collinear (post #4)

Το βρήκα αργότερα στον Α’ τόμο της τετράτομης έκδοσης της του βιβλίου **Η Μαθηματική Συναγωγή του Πάππου του Αλεξανδρέως**, με συγγραφέα τον αείμνηστο **Βαγγέλη Σπανδάγο** (Εκδόσεις ΑΙΘΡΑ, Αθήνα 2001, σελ. 23).



Εάν σε δύο ευθείες (ε), (ε') του επιπέδου θεωρήσουμε τα σημεία A, B, C και A', B', C' αντιστοίχως, ώστε να είναι $AB' \parallel A'B$ και $AC' \parallel A'C$, τότε θα είναι και $BC' \parallel B'C$.

ΛΗΜΜΑ 2

Δίνεται τραπέζιο $ABCD$ με $AB \parallel CD$ και έστω M, τυχόν σημείο επί της πλευράς του AD. Αποδείξτε ότι οι δια των σημείων A, D παράλληλες ευθείες προς τις ευθείες MC, MB αντιστοίχως, τέμνονται σε σημείο επί της πλευράς BC.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω το σημείο $E \equiv AD \cap BC$ και ας είναι N, το σημείο επί της BC, ώστε να είναι $DN \parallel MB$ (1)

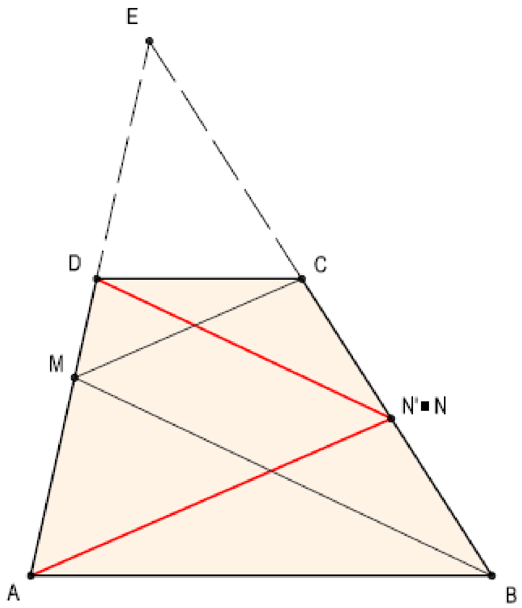
Από (1) $\Rightarrow \dfrac{EM}{ED} = \dfrac{EB}{EN}$ (2)

Έστω το σημείο $N' \in BC$ ώστε $AN' \parallel MC$ (3)

Από (3) $\Rightarrow \dfrac{EM}{EA} = \dfrac{EC}{EN'}$ (4)

Από (2), (4) $\Rightarrow \dfrac{EA}{ED} = \dfrac{EB}{EC} \cdot \dfrac{EN'}{EN}$ (5)

Από (5) και $\dfrac{EA}{ED} = \dfrac{EB}{EC}$ λόγω $AB \parallel CD$, συμπεραίνεται ότι $EN' = EN \Rightarrow N' \equiv N$ και το **Λήμμα 2** έχει αποδειχθεί.



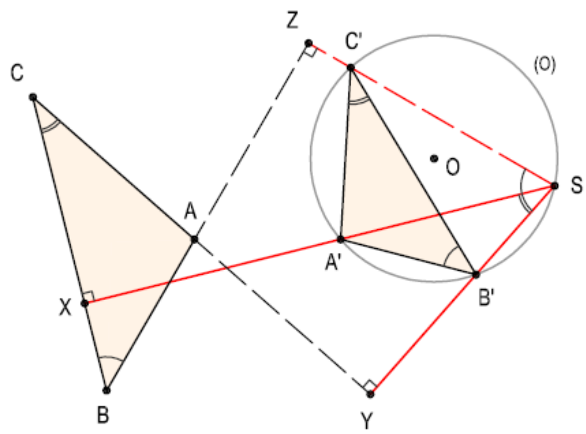
ΛΗΜΜΑ 3

Δύο τρίγωνα αντιρρόπως όμοια μεταξύ τους, είναι και ορθολογικά.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, δύο όμοια και αντίρροπα τρίγωνα, τυχαία συσχετισμένα μεταξύ τους και αρκεί να αποδειχθεί ότι οι δια των κορυφών A', B', C', του τριγώνου $\triangle A'B'C'$, κάθετες ευθείες επί των ευθειών των πλευρών BC, AC, AB αντιστοίχως, του τριγώνου $\triangle ABC$, συντρέχουν.

Έστω X, Y, οι προβολές των σημείων A', B', επί των ευθειών BC, AC αντιστοίχως και έστω το σημείο $S \equiv A'X \cap B'Y$ και αρκεί να αποδειχθεί ότι ισχύει $SC' \perp AB$.



Από $SX \perp BC$ και $SY \perp AC \Rightarrow \angle A'SB' = \angle ACB$ (1)

Από (1) και $\angle ACB = \angle A'C'B' \Rightarrow \angle A'SB' = \angle A'C'B'$ (2)

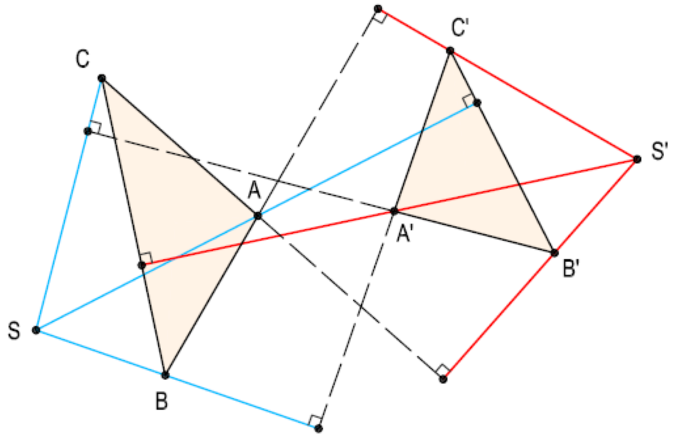
Από (2) έχουμε ότι το τετράπλευρο $A'B'SC'$ είναι εγγράψιμο και άρα ισχύει $\angle A'SC' = \angle A'B'C'$ (3)

Από (3) και $\angle A'B'C' = \angle ABC \Rightarrow \angle A'SC' = \angle ABC$ (4)

Από (4) και $SA' \perp BC$, συμπεραίνεται ότι $SC' \perp AB$ και το **Λήμμα 3** έχει αποδειχθεί.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Για δύο δοσμένα τυχόντα τρίγωνα $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, τυχαία συσχετισμένα μεταξύ τους, εάν συμβαίνει να συντρέχουν οι δια των κορυφών A, B, C, του $\triangle ABC$ κάθετες ευθείες επί των ευθειών των πλευρών $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$ αντιστοίχως, του τριγώνου $\triangle A'B'C'$, τότε σύμφωνα με το **θεώρημα Carnot**, αποδεικνύεται ότι συντρέχουν και οι δια των κορυφών A', B', C', του τριγώνου $\triangle A'B'C'$, κάθετες ευθείες επί των ευθειών των BC, AC, AB αντιστοίχως, των πλευρών του τριγώνου $\triangle ABC$.



Τα ως άνω $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, ονομάζονται **Ορθολογικά τρίγωνα** και τα σημεία S, S' του σχήματος, ονομάζονται **Ορθολογικό σημείο** ή **Ορθολογικό κέντρο** έκαστο, του ενός ως προς το άλλο τρίγωνο. Το σημείο S για παράδειγμα, είναι το **Ορθολογικό σημείο** (**κέντρο**) του τριγώνου $\triangle ABC$, ως προς το τρίγωνο $\triangle A'B'C'$ κ.ο.κ. **Ορθόπολος**, είναι επίσης μία άλλη ονομασία που συναντάμε στην βιβλιογραφία, για τα σημεία S, S'.