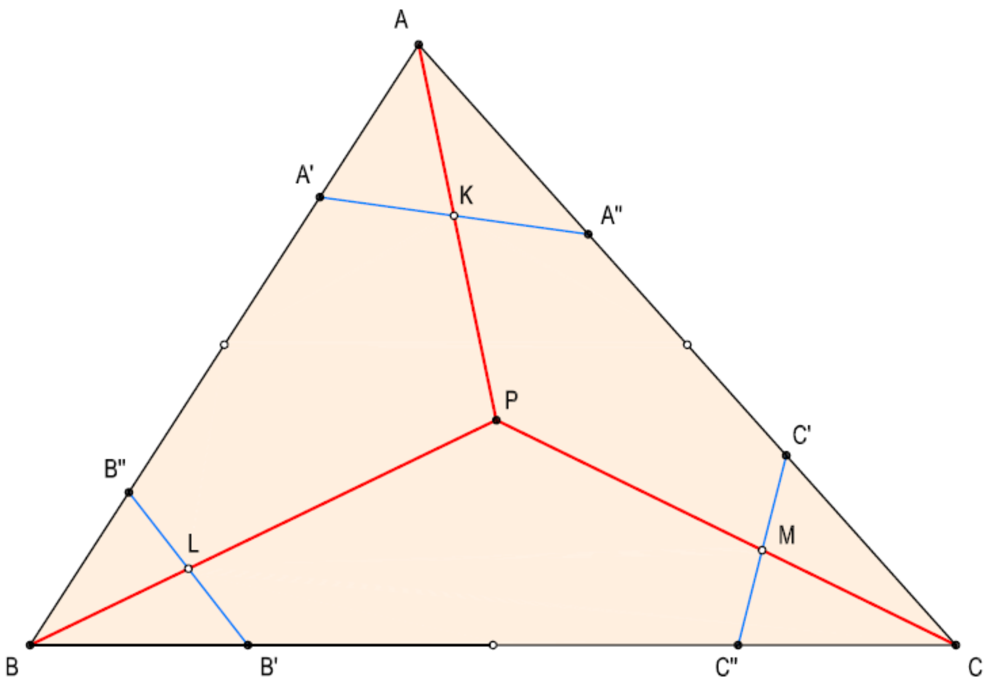
ΠΡΟΤΑΣΗ (Romantics of Geometry – PROBLEM 1520)

Δίνεται τρίγωνο ΔABC και έστω τα ζεύγη των σημείων A', B'' και B', C'' και C', A'', επί των πλευρών του AB, BC, AC αντιστοίχως, ώστε να είναι $AA' = BB''$ και $BB' = CC''$ και $CC' = AA''$ και ας είναι K, L, M, τα μέσα των τμημάτων $A'A'', B'B'', C'C''$, αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι οι ευθείες AK, BL, CM τέμνονται στο ίδιο σημείο.



Η πρόταση αυτή (**Πρόταση 1** στα επόμενα) οφείλεται στον **Kadir Altintas**, καθηγητή Μαθηματικών σε Λύκειο, που ζει και δημιουργεί στο Emirdag της επαρχίας Afyonkarahisar, Τουρκίας και δημοσιεύτηκε στην διαδικτυακή ομάδα **Romantics of Geometry**, ως ΑΣΚΗΣΗ 1520.

https://www.facebook.com/groups/parmenides52/permalink/1559923694121331/

Στον ίδιο σύνδεσμο, συζητήθηκαν δύο πρόσθετα ζητούμενα, προτεινόμενα επίσης από τον ίδιο, οι αποδείξεις των οποίων συμπεριλαμβάνονται στην παρούσα ανανέωση του άρθρου.

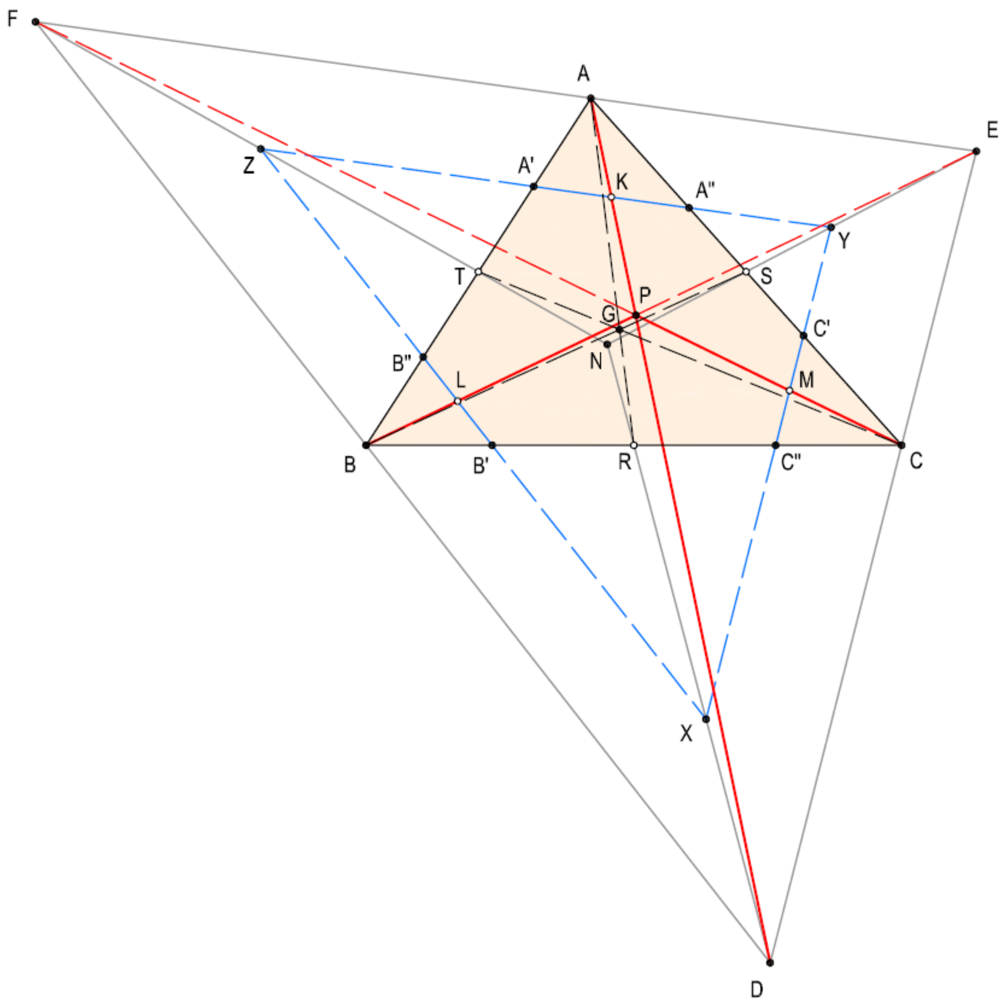
Το πρώτο ζητούμενο (**Πρόταση 2** στα επόμενα) είναι να αποδειχθεί ότι τα σημεία A', B'', B', C'', C', A'' ανήκουν στην ίδια έλλειψη και το δεύτερο ζητούμενο (**Πρόταση 3** στα επόμενα) ότι τα τρίγωνα $\triangle ABC$ και $\triangle KLM$ έχουν το ίδιο βαρύκεντρο.

Η απόδειξη που ακολουθεί παρακάτω, αντικαθιστά αυτήν που ανάρτησα αρχικά στο παραπάνω σύνδεσμο γιατί είχε σφάλμα τεκμηρίωσης. Το λάθος που ξέφευγε εντόπισε και μου υπέδειξε ο αγαπητός φίλος **Παναγιώτης Χρονόπουλος**, τον οποίο ευχαριστώ θερμά από την θέση αυτή.

Για λόγους αρχής, η λανθασμένη απόδειξη διατηρείται στο αρχείο από σεβασμό στον αναγνώστη, προσιτή σε κάθε ενδιαφερόμενο για την διάσωσή της, αναιρώντας το σφάλμα τεκμηρίωσης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1

Δίνεται τρίγωνο ΔABC και έστω τα ζεύγη των σημείων A', B'' και B', C'' και C', A'', επί των πλευρών του AB, BC, AC αντιστοίχως, ώστε να είναι $AA' = BB''$ και $BB' = CC''$ και $CC' = AA''$ και ας είναι K, L, M, τα μέσα των τμημάτων $A'A'', B'B'', C'C''$, αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι οι ευθείες AK, BL, CM τέμνονται στο ίδιο σημείο.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Έστω το σημείο $P \equiv BL \cap CM$ και αρκεί να αποδειχθεί ότι τα σημεία A, K, P, είναι συνευθειακά.

Δια των σημείων B, C, φέρνουμε τις παράλληλες ευθείες προς τις ευθείες $B'B'', C'C''$ αντιστοίχως και ας είναι D, το σημείο τομής τους.

Θεωρούμε την δέσμη $B.B''LB'D$ και από $B'B'' \parallel BD$ έχουμε $(B.B''LB'D) = (B'', L, B')$ (1)

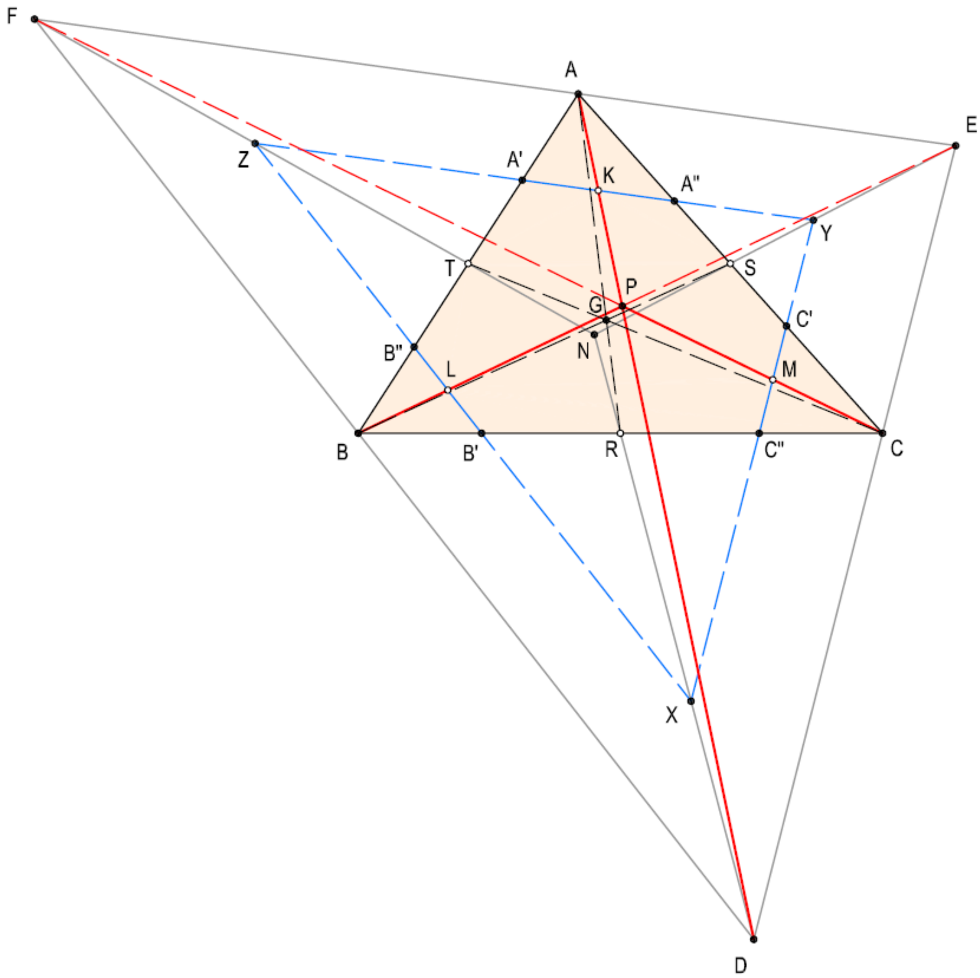
Ομοίως, από την δέσμη $C.C'MC''D$ με $C'C'' \parallel CD$ έχουμε $(C.C'MC''D) = (C', M, C'')$ (2)

Από (1),(2) και $(B'', L, B') = (C', M, C'')$ λόγω των σημείων L, M, ως των μέσων των τμημάτων $B'B'', C'C''$ αντιστοίχως, προκύπτει $(B.B''LB'D) = (C.C'MC''D)$ (3)

Από (3) και επειδή οι δέσμες $B.B''LB'D$, $C.C'MC''D$ έχουν την $BB' \equiv CC''$ ως κοινή ομόλογη ακτίνα τους, έχουμε ότι τα σημεία $A \equiv BB'' \cap CC'$ και $P \equiv BL \cap CM$ και $D \equiv BD \cap CD$ είναι συνευθειακά, ως τα σημεία τομής των υπολοίπων ζευγών ομολόγων ακτίνων τους.

• Έστω το σημείο $E \equiv CD \bigcap BP$ και ας είναι A', το σημείο τομής της AB, από την δια του σημείου A'' παράλληλη ευθεία προς την ευθεία AE, όπου A'' είναι το ισοτομικό σημείο του C', ως προς την πλευρά AC του $\triangle ABC$ ($\Rightarrow$ $CC' = AA''$).

Έστω το σημείο $K \equiv AP \bigcap A'A''$ και θα αποδειχθεί, ως ισοδύναμο ζητούμενο, ότι το σημείο αυτό ταυτίζεται με το μέσον του τμήματος $A'A''$ και ότι το σημείο A' ταυτίζεται με το ισοτομικό σημείο του B'', ως προς την πλευρά AB του $\triangle ABC$.



• Θεωρούμε τις δέσμες $A.A'KA''E$, $C.C''MC'E$, με την $AA'' \equiv CC'$ ως κοινή ομόλογη ακτίνα τους και συνευθειακά τα σημεία $B \equiv AA' \bigcap CC''$ και $P \equiv AK \bigcap CM$ και $E \equiv AE \bigcap CE$, ως τα σημεία τομής των
υπολοίπων ζευγών ομολόγων ακτίνων τους και άρα, οι δέσμες αυτές έχουν ίσους Διπλούς λόγους.

Ισχύει δηλαδή : $(A.A'KA''E) = (C.C''MC')$ (4)

Αλλά όμως : $(A.A'KA''E) = (A', K, A'')$ (5) λόγω $A'A'' \parallel AE$.

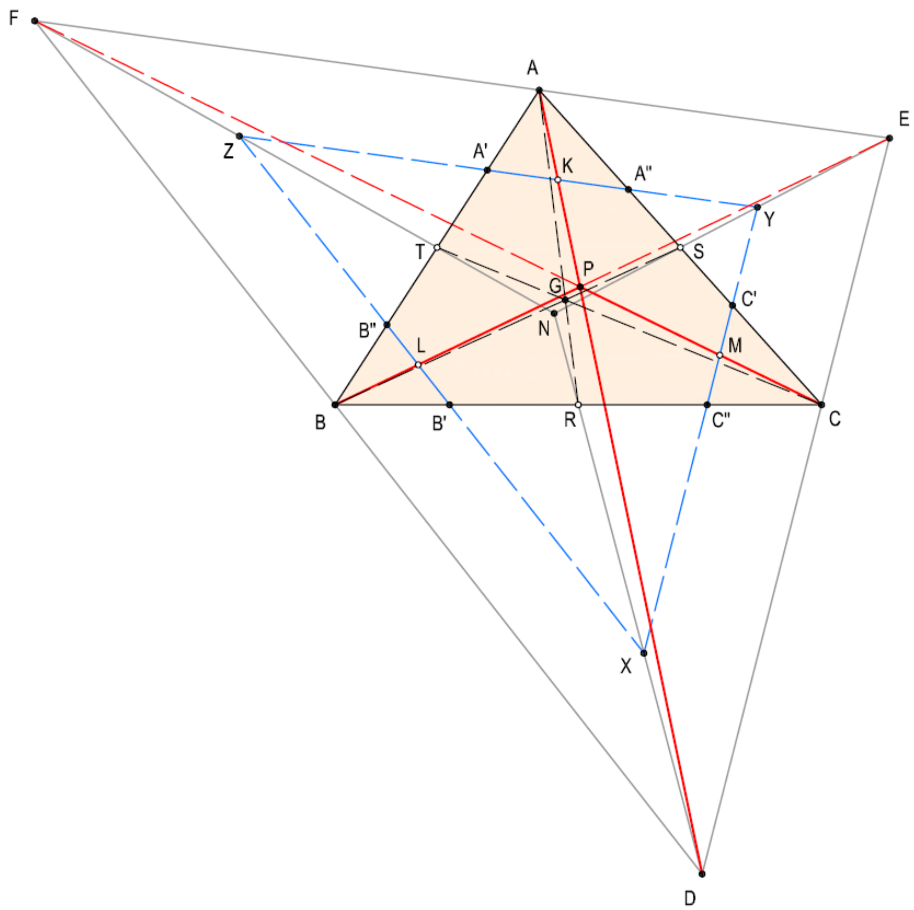
Και ομοίως : $(C.C''MC'E) = (C'', M, C')$ (6) λόγω $C'C'' \parallel CE$.

Από (4),(5),(6) $\Rightarrow$ $(A', K, A'') = (C'', M, C')$ $\Rightarrow$ $\dfrac{A''A'}{A''K} = \dfrac{C'C''}{C'M} = 2$ $\Rightarrow$ $A''A' = 2A''K$ (7)

Από (7) συμπεραίνεται ότι το σημείο K ταυτίζεται με το μέσον του τμήματος $A'A''$.

• Έστω τα σημεία $F \equiv AE \cap BD$ και $X \equiv B'B'' \cap C'C''$ και $Y \equiv C'C'' \cap A'A''$ και $Z \equiv A'A'' \cap B'B''$.

Από $DE \parallel XY$ και $EF \parallel YZ$ και $XZ \parallel DF$, έχουμε ότι τα τρίγωνα $\triangle DEF$, $\triangle XYZ$, είναι προοπτικά και άρα, σύμφωνα με το **θεώρημα Desarques**, έχουμε ότι $DX \cap EY \cap FZ \equiv N$ (8)



• Έστω R, S, τα μέσα των πλευρών BC, AC αντιστοίχως.

Από $\dfrac{RB'}{RB} = \dfrac{RC''}{RC}$ και $B''X \parallel BD$ και $C''X \parallel CD$, σύμφωνα με το **Θεώρημα θαλή**, έχουμε ότι τα σημεία R, X, D είναι συνευθειακά και όμοίως, τα σημεία S, Y, E είναι επίσης συνευθειακά, από $\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{SA''}{SA}$ και $C'Y \parallel CE$ και $A''Y \parallel AE$.

• Η δέσμη $A.A''KA'F$ τέμνεται από την ευθεία $A'A'' \parallel AF$ και άρα, $(A.A''KA'F) = (A'', K, A')$ (9)

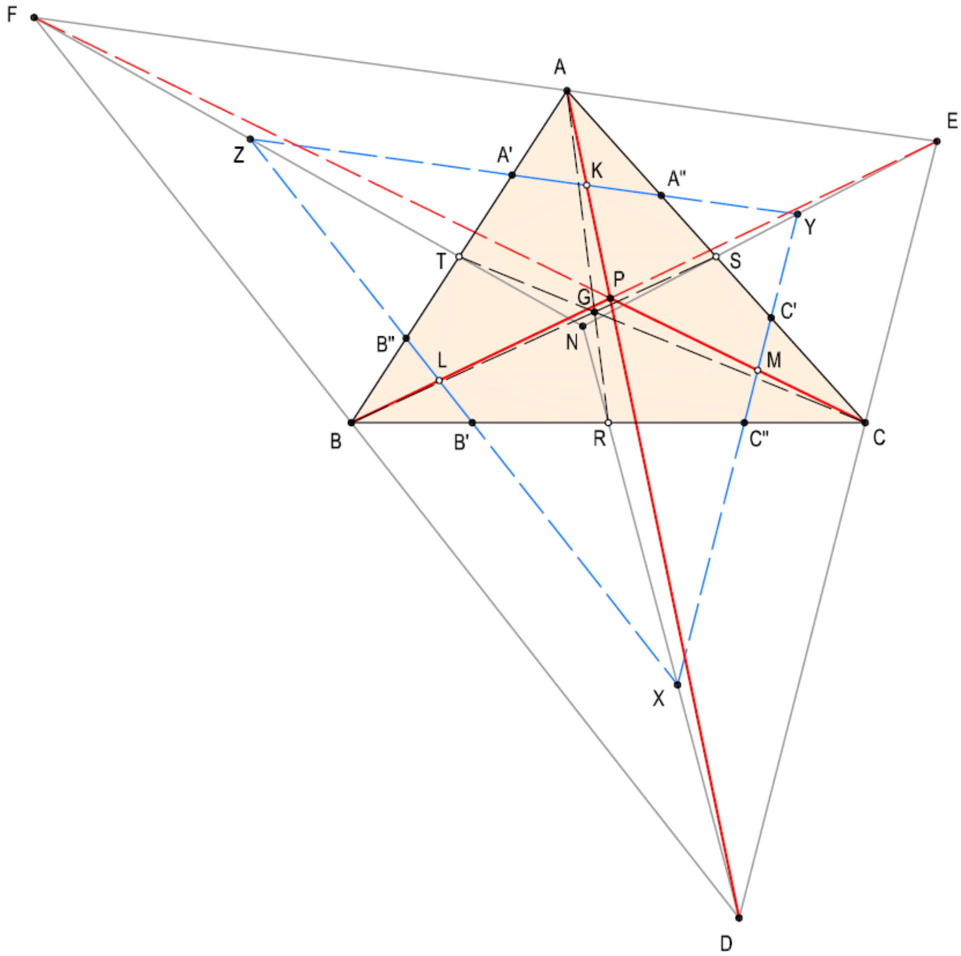
Ομοίως, η $B.B'LB''F$ τέμνεται από την ευθεία $B'B'' \parallel BF$ και άρα, $(B.B'LB''F) = (B', L, B'')$ (10)

Από (9), (10) και $(A'', K, A') = \dfrac{A'A''}{A'K} = 2 = \dfrac{B'B''}{B'L} = (B', L, B'') \Rightarrow$ $(A.A''KA'F) = (B.B'LB''F)$ (11)

Από (11) και επειδή οι δέσμες $A.A''KA'F$, $B.B'LB''F$ έχουν την $AA' \equiv BB''$ ως κοινή ομόλογη ακτίνα τους, προκύπτει ότι τα σημεία $C \equiv AA'' \cap BB'$ και $P \equiv AK \cap BL$ και $F \equiv AF \cap BF$ είναι συνευθειακά.

Έχουμε διαμορφώσει έτσι, το δοσμένο τρίγωνο $\triangle ABC$, ως το σεβιανό τρίγωνο του $\triangle DEF$, ως προς το σημείο P και ας είναι T, το σημείο τομής της AB από την ευθεία FZN.

Από $DR \cap ES \cap FT \equiv N$ τώρα, σύμφωνα με το **Cevian Nests theorem**, έχουμε ότι οι ευθείες AR, BS, CT τέμνονται στο ίδιο σημείο, το οποίο ταυτίζεται προφανώς με το βαρύκεντρο G του $\vartriangle ABC$, λόγω των διαμέσων AR, BS και επομένως, το σημείο T ταυτίζεται με το μέσον της πλευράς AB.



Τέλος, από $B''Z \parallel BF$ και $A'Z \parallel AF$ έχουμε $\dfrac{TB''}{TB} = \dfrac{TZ}{TF} = \dfrac{TA'}{TB}$ (12)

Από (12) και $TA = TB \Rightarrow TA' = TB''$ (13)

Από (13) συμπεραίνεται ότι το σημείο A' ταυτίζεται με το ισοτομικό σημείο του B'' ως προς την πλευρά AB του $\vartriangle ABC$ και το ισοδύναμο ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

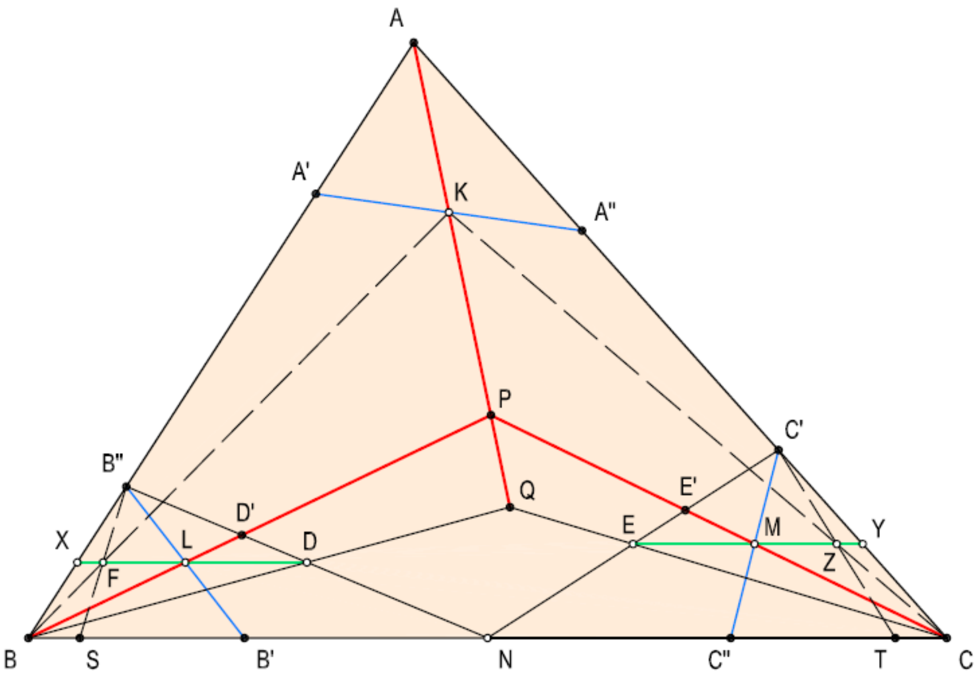
- Η απόδειξη αυτή είναι αφιερωμένη σε ένδειξη τιμής, στον **Άρη Παυλάκη.** (*)

(*) Ο Άρης Παυλάκης είναι εραστής της Γεωμετρίας που ζει και δημιουργεί στον Πειραιά. Είναι Διπλωματούχος Μηχανικός, απόφοιτος της Σχολής Ναυπηγών Μηχανικών, του Ε.Μ.Π. και εργάζεται σε Ναυτιλιακή εταιρεία.

Ένθερμος θιασώτης του συνθετικού τρόπου απόδειξης των γεωμετρικών προτάσεων, ανήκει στην γενιά των Πρακτικών Λυκείων που με την Γεωμετρία (κυρίως) γαλουχήθηκε στον επαγωγικό συλλογισμό, βασικό στοιχείο της ορθολογικής σκέψης και στάσης στη ζωή.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1 (ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ)

Δίνεται τρίγωνο ΔABC και έστω τα ζεύγη των σημείων A', B'' και B', C'' και C', A'', επί των πλευρών του AB, BC, AC αντιστοίχως, ώστε να είναι $AA' = BB''$ και $BB' = CC''$ και $CC' = AA''$ και ας είναι K, L, M, τα μέσα των τμημάτων $A'A'', B'B'', C'C''$, αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι οι ευθείες AK, BL, CM τέμνονται στο ίδιο σημείο.



Έστω P, το σημείο τομής BL, CM και αρκεί να αποδειχθεί ότι τα σημεία A, K, P, είναι συνευθειακά.

Έστω N, το μέσον της πλευράς BC του δοσμένου τριγώνου ΔABC και ας είναι D, E, τα μέσα των τμημάτων NB'', NC', αντιστοίχως.

Έστω τα σημεία $Q \equiv BD \cap CE$ και $D' \equiv NB'' \cap BL$ και $E' \equiv NC' \cap CM$.

- Στο τρίγωνο $\Delta NB'B''$ με διατέμνουσα την BLD', σύμφωνα με το **Θεώρημα Μενελάου**, έχουμε:

$$\frac{D'N}{D'B''} \cdot \frac{LB''}{LB'} \cdot \frac{BB'}{BN} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{D'N}{D'B''} = \frac{BN}{BB'} \quad ,(1) \text{ γιατί ισχύει } LB' = LB'' \text{ από } LD \,//\, B'N \text{ και } DN = DB''.$$

Ομοίως, στο τρίγωνο $\Delta NC'C''$ με διατέμνουσα την CME', έχουμε:

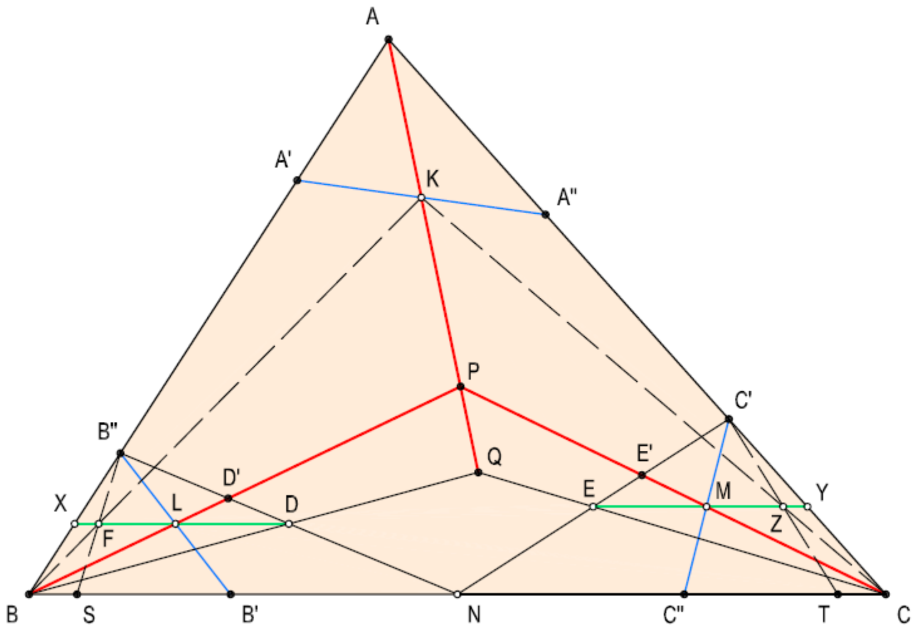
$$\frac{E'N}{E'C'} \cdot \frac{MC'}{MC''} \cdot \frac{CC''}{CN} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{E'N}{E'C'} = \frac{CN}{CC''} \quad ,(2) \text{ γιατί ισχύει } MC' = MC'' \text{ από } EM \,//\, NC'' \text{ και } EN = EC'.$$

$$\text{Από } (1), (2) \text{ και } BN = CN \text{ και } BB' = CC'' \;\Rightarrow\; \frac{D'N}{D'B''} = \frac{E'N}{E'C'} \quad ,(3)$$

- Θεωρούμε την δέσμη $B.NB''DD'$ η οποία τέμνεται από την ευθεία NB'' και άρα, έχουμε:

$$(B.NB''DD') = (N, B'', D, D') = \frac{DN}{DB''} \div \frac{D'N}{D'B''} \quad ,(4)$$

Ομοίως, θεωρούμε την δέσμη $C.NC'EE'$ η οποία τέμνεται από την ευθεία NC' και άρα, έχουμε:



$$(C.NC'EE') = (N, C', E, E') = \frac{EN}{EC'} \div \frac{E'N}{E'C'} \quad ,(5)$$

Από (3), (4), (5) $\Rightarrow$ $(B.NB''DD') = (C.NC'EE')$,(6) γιατί $DN = DB''$ και $EN = EC'$.

Από (6) και επειδή οι δέσμες $B.NB''DD'$, $C.NC'EE'$ έχουν την $BN \equiv CN$ ως κοινή ακτίνα τους, προκύπτει ότι τα σημεία $Q \equiv BD \cap CE$ και $P \equiv BD' \cap CE'$ και $A \equiv BB'' \cap CC'$ είναι συνευθειακά.

- Έστω τα σημεία $X \equiv AB \cap DL$ και $Y \equiv AC \cap EM$, ως τα μέσα των τμημάτων BB'', CC' (προφανές).

Έστω τα σημεία $F \equiv DX \cap BK$ και $S \equiv BC \cap B''F$ και ας είναι T, το ισοτομικό σημείο του S, ως προς την πλευρά BC ($\Rightarrow NS = NT$).

Έστω το σημείο $Z \equiv EY \cap C'T$, ως το μέσον του $C'T$, από $EY // NC$ και $EN = EC'$.

$$\text{Από } DX // NB \Rightarrow \frac{DX}{DF} = \frac{NB}{NS} \quad ,(7) \text{ και από } EY // NC \Rightarrow \frac{EY}{EZ} = \frac{NC}{NT} \quad ,(8)$$

$$\text{Από } (7), (8) \Rightarrow \frac{DX}{DF} = \frac{EY}{EZ} \quad ,(9) \text{ γιατί ισχύει } NB = NC \text{ και } NS = NT.$$

- Θεωρούμε την δέσμη $B.XFDN$ η οποία τέμνεται από την ευθεία $DX // BN$ και άρα, έχουμε:

$$(B.XFDN) = (X, F, D) = \frac{DX}{DF} \quad ,(10)$$

Ομοίως, θεωρούμε την δέσμη $C.YZEN$ η οποία τέμνεται από την ευθεία $YE // CN$ και άρα, έχουμε:

$$(C.YZEN) = (Y, Z, E) = \frac{EY}{EZ} \quad ,(11)$$

$$\text{Από } (9), (10), (11) \Rightarrow (B.XFDN) = (C.YZEN) \quad ,(12)$$

Από (12) και επειδή οι δέσμες $B.XFDN$, $C.YZEN$, έχουν την $BN \equiv CN$ ως κοινή ακτίνα τους, προκύπτει ότι τα σημεία $Q \equiv BD \cap CE$ και $A \equiv BX \cap CE$ και το σημείο τομής των ακτίνων BF, CZ είναι συνευθειακά και επομένως, η ευθεία CZ περνάει από το σημείο $K \equiv A'A'' \cap BF$.

Από τα συνευθειακά σημεία A, P, Q και A, K, Q τώρα, προκύπτει ότι και τα τέσσερα σημεία A, K, P, Q, ανήκουν στην ίδια ευθεία και το ισοδύναμο ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΣΧΟΛΙΟ

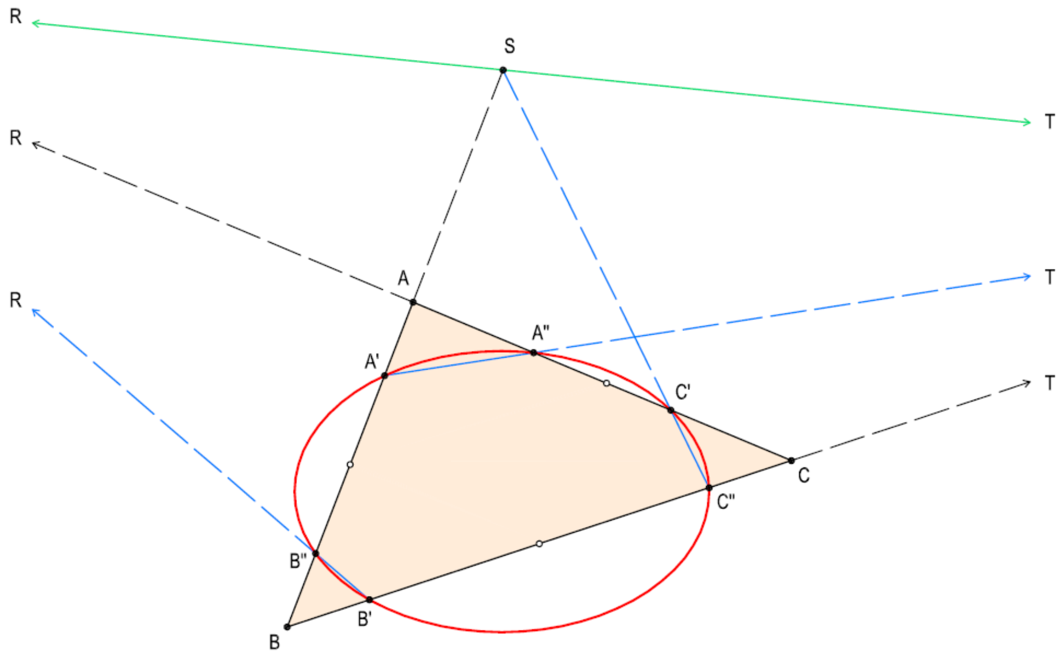
Τα υπογραμμισμένα παραπάνω με κόκκινο χρώμα, συνιστούν το σφάλμα τεκμηρίωσης αυτής της απόδειξης, καθώς το αποτέλεσμα αυτό δεν προκύπτει από όσα έχουν προηγηθεί.

Το σημείο τομής των ευθειών BF, CZ, σωστά συμπεραίνεται ότι ανήκει στην ευθεία AQ, αλλά δεν τεκμαίρεται απαραίτητα ότι ταυτίζεται με το μέσον K του τμήματος $A'A''$.

Δεν ξέρω αν σώζεται η απόδειξη βασισμένη στο ίδιο σκεπτικό, αλλά (για άρση του αδιεξόδου) ήταν πιο αποτελεσματικό για μένα να ακολουθήσω διαφορετική προσέγγιση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2

Δίνεται τρίγωνο $\triangle ABC$ και έστω τα ζεύγη των σημείων A', B'' και B', C'' και C', A'', επί των πλευρών του AB, BC, AC αντιστοίχως, ώστε να είναι $AA' = BB''$ και $BB' = CC''$ και $CC' = AA''$. Αποδείξτε ότι τα έξι ως άνω σημεία ανήκουν στην ίδια έλλειψη.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω τα σημεία $T \equiv BC \cap A'A''$ και $R \equiv AC \cap B'B''$ και $S \equiv AB \cap C'C''$.

Στο τρίγωνο $\triangle ABC$ με διατέμνουσα την ευθεία $A'A''T$, σύμφωνα με το **Θεώρημα Μενελάου**, έχουμε:

$$\frac{TB}{TC}\cdot\frac{A''C}{A''A}\cdot\frac{A'A}{A'B}=1 \Rightarrow \frac{TB}{TC}=\frac{A''A}{A''C}\cdot\frac{A'B}{A'A} \qquad (1)$$

Ομοίως, στο ίδιο τρίγωνο με διατέμνουσα την ευθεία $B'B''R$ έχουμε:

$$\frac{RC}{RA}\cdot\frac{B''A}{B''B}\cdot\frac{B'B}{B'C}=1 \Rightarrow \frac{RA}{RB}=\frac{B''B}{B''A}\cdot\frac{B'C}{B'B} \qquad (2)$$

Ομοίως, στο ίδιο τρίγωνο με διατέμνουσα την ευθεία $C'C''S$ έχουμε:

$$\frac{SA}{SB}\cdot\frac{C''B}{C''C}\cdot\frac{C'C}{C'A}=1 \Rightarrow \frac{SA}{SB}=\frac{C''C}{C''B}\cdot\frac{C'A}{C'C} \qquad (3)$$

Από (1), (2), (3) $\quad \Rightarrow \dfrac{TB}{TC}\cdot\dfrac{RC}{RA}\cdot\dfrac{SA}{SB}=1 \qquad (4)$

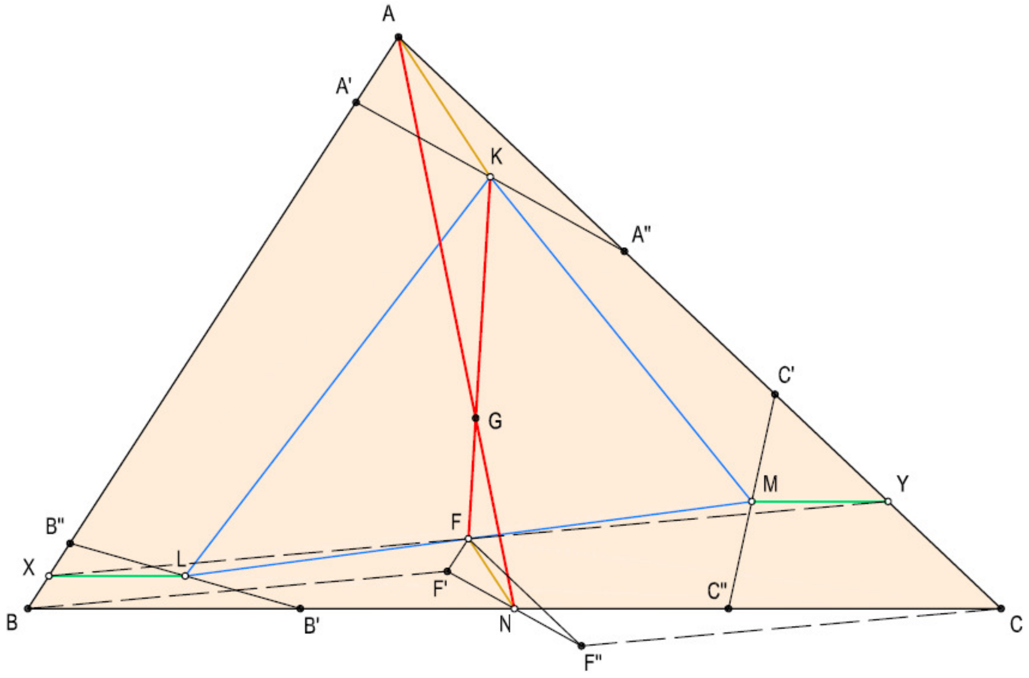
λόγω $A''A = C'C$ και $A'B = B''A$ και $B''B = A'A$ και $B'C = C''B$ και $C''C = B'B$ και $C'A = A''C$.

Από (4), σύμφωνα με το **Θεώρημα Μενελάου**, προκύπτει ότι τα σημεία R, S, T, είναι συνευθειακά.

Έτσι, σύμφωνα με το **θεώρημα Pascal**, συμπεραίνεται ότι το κυρτό εξάγωνο $A'B''B'C''C'A''$ είναι εγγράψιμο σε έλλειψη και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3

Δίνεται τρίγωνο $\triangle ABC$ και έστω τα ζεύγη των σημείων A', B'' και B', C'' και C', A'', επί των πλευρών του AB, BC, AC αντιστοίχως, ώστε να είναι $AA' = BB''$ και $BB' = CC''$ και $CC' = AA''$ και ας είναι K, L, M, τα μέσα των τμημάτων $A'A'', B'B'', C'C''$, αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα $\triangle ABC$, $\triangle KLM$, έχουν το ίδιο βαρύκεντρο.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω F, το μέσον της πλευράς LM του $\triangle KLM$ και X, Y, τα μέσα των BB'', CC', αντιστοίχως.

- Από $XL \parallel= \dfrac{BB'}{2}$ και $MY = \dfrac{CC''}{2}$ και $BB' = CC'' \Rightarrow XL \parallel= MY$ (1)

Από (1), σύμφωνα με το **θεώρημα θαλή**, προκύπτει ότι η ευθεία XY περνάει από το σημείο F και ισχύει $FX = FY$ (2)

Έστω F', F'', τα σημεία ώστε τα $BXFF', CYFF''$ να είναι παραλληλόγραμμα.

Από $BF' \parallel= XF = FY \parallel= CF''$, έχουμε ότι η ευθεία $F'F''$ περνάει από το μέσον N της πλευράς BC και ισχύει $NF' = NF''$ (3)

- Από $FF' \parallel= \dfrac{BB''}{2} = \dfrac{AA'}{2}$ και $FF'' \parallel= \dfrac{CC'}{2} = \dfrac{AA''}{2}$ τώρα, προκύπτει ότι τα τρίγωνα $\triangle AA'A'', \triangle FF'F'''$ είναι όμοια, με λόγο ομοιότητας ίσον με 2 και άρα, έχουμε $AK = 2FN$ (4)

Από (4), με το **θεώρημα θαλή**, έχουμε $AG = 2GN$ (5) και $KG = 2GF$ (6), όπου $G \equiv AN \cap KF$.

Από (5),(6), συμπεραίνεται ότι το σημείο G είναι κοινό βαρύκεντρο των τριγώνων $\triangle ABC, \triangle KLM$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.