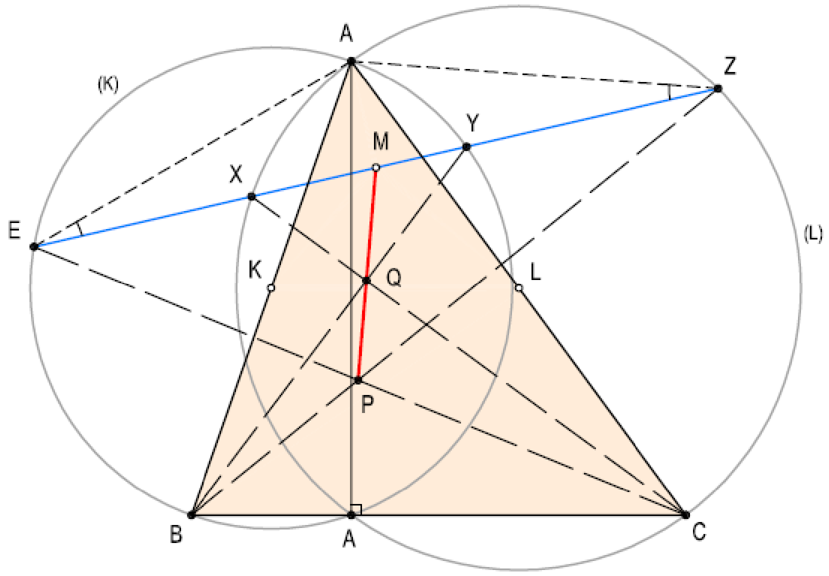
ΜΙΑ ΠΡΟΚΛΗΤΙΚΗ ΔΙΧΟΤΟΜΗΣΗ.

Δίνεται τρίγωνο ΔABC και έστω AD το ύψος του. Έστω $(K),(L)$, **οι κύκλοι με διάμετρο AB, AC αντιστοίχως και ας είναι E, Z, δύο τυχόντα σημεία τους ώστε να είναι $AE = AZ$ και έστω τα σημεία $X \equiv (L) \cap EZ$ και $Y \equiv (K) \cap EZ$, μεταξύ των E, Z. Αποδείξτε ότι η ευθεία που συνδέει τα σημεία έστω $P \equiv BZ \cap CE$ και $Q \equiv BY \cap CX$, περνάει από το μέσον M του τμήματος EZ.**



Η πρόταση αυτή έχει δημοσιευτεί στο φόρουμ **mathematica.gr** και είναι εμπνευσμένη από την ανάγνωση της απόδειξης άλλου προβλήματος στο ίδιο φόρουμ, που δόθηκε από τον **Στάθη Κούτρα.**

https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=185&t=59957

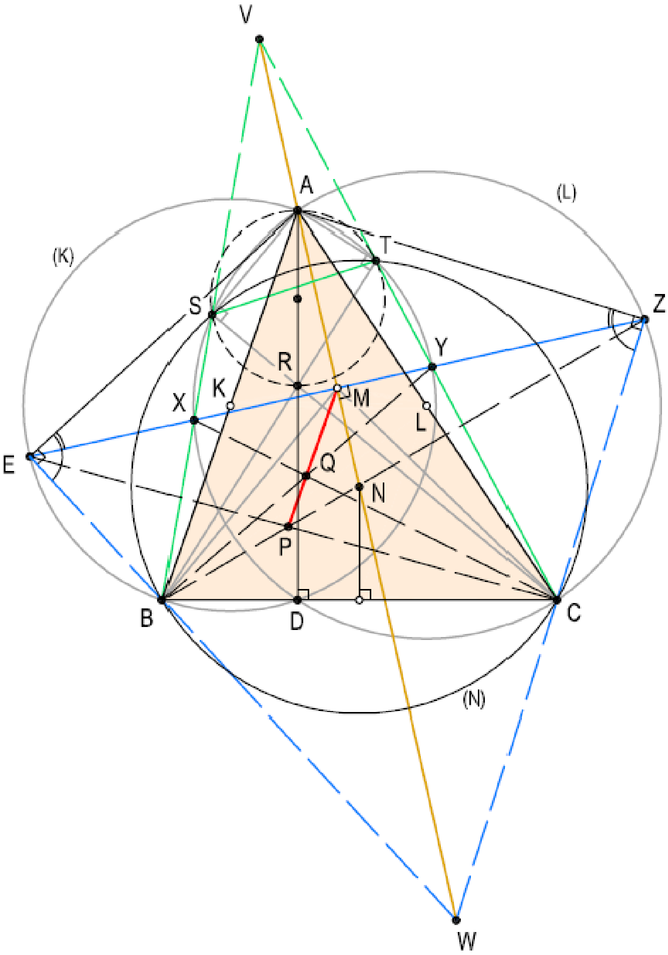
Όπως είναι γνωστό, τίποτα δεν έρχεται ουρανοκατέβατο αλλά συσχετίζεται με κάτι που έχουμε ξαναδεί, συνδυάζεται πιθανόν με την ιδέα που μας κεντρίζει το ενδιαφέρον διαβάζοντας κάποια απόδειξη άλλου λύτη και προκύπτει έτσι, ένα καινούριο αποτέλεσμα ως πρόταση.

Στον παραπάνω σύνδεσμο, ο αναγνώστης θα βρει επίσης μία άλλη συνθετική απόδειξη της πρότασης, που οφείλεται στον **Στάθη Κούτρα**.

ΜΙΑ ΠΡΟΚΛΗΤΙΚΗ ΔΙΧΟΤΟΜΗΣΗ.

Δίνεται τρίγωνο ΔABC και έστω AD το ύψος του. Έστω $(K),(L)$, **οι κύκλοι με διάμετρο** AB, AC **αντιστοίχως και ας είναι** E, Z, **δύο τυχόντα σημεία τους ώστε να είναι** $AE = AZ$ **και έστω τα σημεία** $X \equiv (L) \cap EZ$ **και** $Y \equiv (K) \cap EZ$, **μεταξύ των** E, Z. **Αποδείξτε ότι η ευθεία που συνδέει τα σημεία έστω** $P \equiv BZ \cap CE$ **και** $Q \equiv BY \cap CX$, **περνάει από το μέσον** M **του τμήματος** EZ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ.



- Έστω το σημείο $W \equiv EB \cap ZC$ και από $\angle ZEB = 90° - \angle AEZ = 90° - \angle AZE$ προκύπτει $\angle ZEB = \angle EZC$,(1) και άρα, το σημείο W ανήκει στην μεσοκάθετη ευθεία του EZ.

Έστω N, το σημείο τομής της ευθείας AW, από την μεσοκάθετη ευθεία της πλευράς BC του δοσμένου τριγώνου ΔABC.

- Με κέντρο το N και ακτίνα $NB = NC$, γράφουμε τον κύκλο έστω (N) ο οποίος τέμνει τους $(L),(K)$, στα σημεία S, T, αντιστοίχως.

Σύμφωνα με το παρακάτω **Λήμμα 1** έχουμε ότι τα σημεία B, X, S και ομοίως τα σημεία C, Y, T, είναι συνευθειακά.

Έστω το σημείο $R \equiv BT \cap CS$ το οποίο ανήκει στην ευθεία AD, ως ριζικό κέντρο των κύκλων $(K),(L),(N)$.

- Έχουμε διαμορφώσει έτσι, το τετράπλευρο $BCTS$, εγγεγραμμένο στον κύκλο (N) και σύμφωνα με το παρακάτω **Λήμμα 2**, προκύπτει ότι το σημείο έστω $V \equiv BS \cap CT$ ανήκει στην ευθεία AN, λόγω του A, ως σημείου τομής της ευθείας $RD \perp BC$ από τον περίκυκλο του τριγώνου ΔRST, αφού το τετράπλευρο $ASRT$ είναι εγγράψιμο από $AS \perp SR \equiv SC$ και $AT \perp TR \equiv TB$.

Θεωρούμε τις δέσμες $B.EXMC$, $C.ZYMB$ τώρα, οι οποίες έχουν την $BC \equiv CB$ ως κοινή ομόλογη ακτίνα τους και συνευθειακά, τα σημεία τομής των υπολοίπων ζευγών ομολόγων ακτίνων τους.
$(W \equiv BE \cap CZ$ και $V \equiv BX \cap CY$ και $M \equiv BM \cap CM)$.

Άρα, οι δέσμες αυτές έχουν ίσους Διπλούς λόγους και επομένως, ισχύει $(B.EXMC) = (C.ZYMB)$,(2)

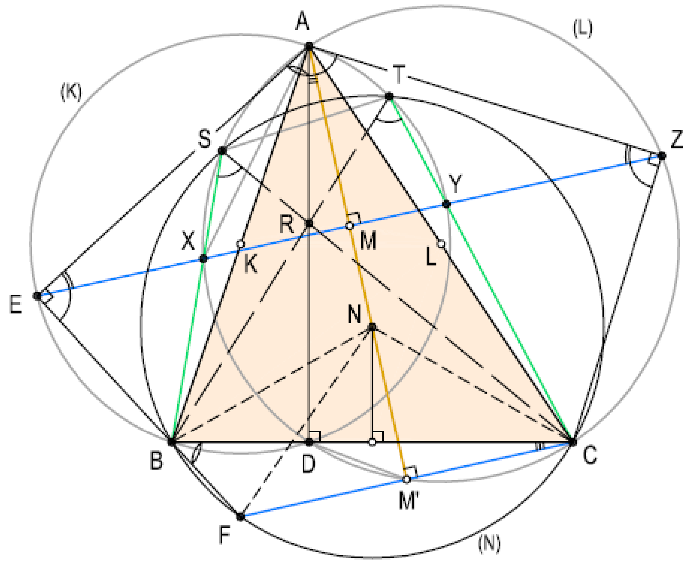
Αλλά, $(B.EXMC) = (C.EXMB)$,(3) και $(C.ZYMB) = (B.ZYMC)$,(4)

Από (2), (3), (4) $\Rightarrow (B.ZYMC) = (C.EXMB)$,(5)

Από (5) και επειδή οι δέσμες $B.ZYMC$, $C.EXMB$ έχουν την $BC \equiv CB$ ως κοινή ακτίνα τους, συμπεραίνεται ότι τα σημεία $P \equiv BZ \cap CE$ και $Q \equiv BY \cap CX$ και $M \equiv BM \cap CM$, είναι συνευθειακά και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΛΗΜΜΑ 1.

Δίνεται τρίγωνο ΔABC και έστω AD το ύψος του. Έστω $(K),(L)$, **οι κύκλοι με διάμετρο AB, AC αντιστοίχως και ας είναι E, Z, δύο τυχόντα σημεία τους ώστε να είναι $AE = AZ$ και έστω τα σημεία $X \equiv (L) \cap EZ$ και $Y \equiv (K) \cap EZ$, μεταξύ των E, Z. Η μεσοκαθετη ευθεία του EZ, τέμνει την μεσοκαθετη ευθεία της πλευράς BC, στο σημείο έστω N και ας είναι S, T, τα σημεία τομής των κύκλων $(L),(K)$ αντιστοίχως, από τον κύκλο έστω (N), με κέντρο το σημείο N και ακτίνα $NB = NC$. Αποδείξτε ότι τα σημεία B, X, S (ομοίως, τα C, Y, T), είναι συνευθειακά.**



ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

Από το εγγράψιμο στον κύκλο (N) τετράπλευρο $BCTS$ έχουμε $\angle BSC = \dfrac{\angle BNC}{2}$,(1)

Αρκεί να αποδειχθεί ότι ισχύει και $\angle XSC = \dfrac{\angle BNC}{2}$,(2)

Στον κύκλο (L) έχουμε $\angle XSC = \angle XZC = \angle MAZ = \angle MAE$,(3) λόγω $XZ \perp MA$ και $ZC \perp AZ$.

Έστω τα σημεία $M' \equiv (N) \cap AN$ και $F \equiv (N) \cap CM'$.

Ισχύει $CM' \perp AN$ και $M'C = M'F$,(4) λόγω της AN, ως ευθείας της διαμέτρου του κύκλου (N).

Από (4) και $ME = MZ$ και $CF \parallel EZ$ τώρα, προκύπτει ότι το τετράπλευρο $EZCF$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και άρα, ισχύει $\angle ZEF = \angle EZC$,(5)

Από (5) και $\angle EZC = \angle ZEB \Rightarrow \angle ZEF = \angle ZEB$,(6) και επομένως, τα E, B, F, είναι συνευθειακά.

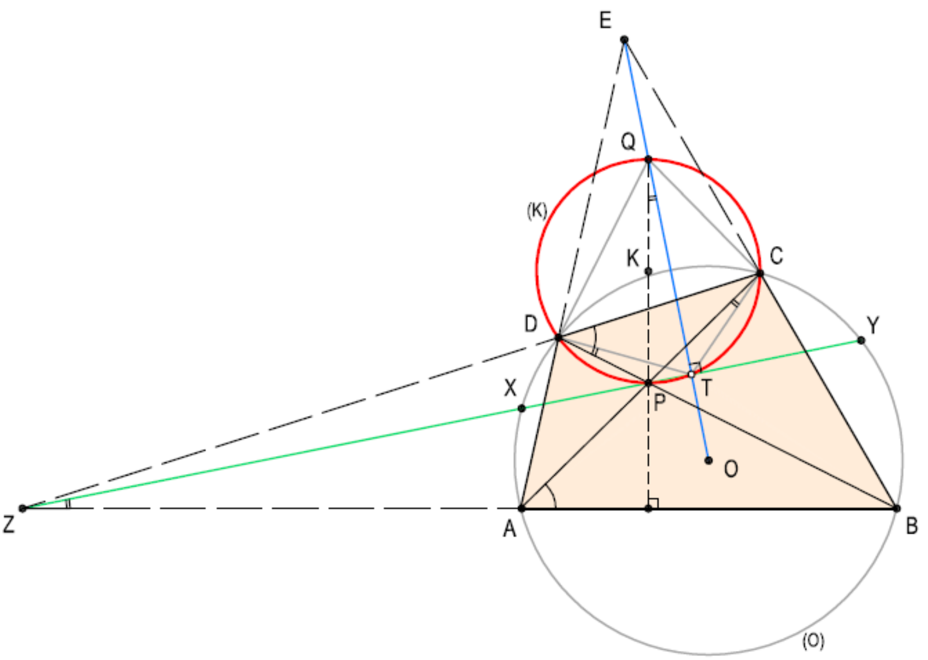
Ισχύει τώρα, $\angle MAE = \angle AED + \angle DAM' = \angle CBF + \angle BCF$,(7) (από εγγράψιμα $AEBD, ADM'C$).

Αλλά, $\angle CBF + \angle BCF = \dfrac{\angle FNC}{2} + \dfrac{\angle FNB}{2} = \dfrac{\angle BNC}{2}$,(8)

Από (3), (7), (8) $\Rightarrow$ (2) και το **Λήμμα 1** έχει αποδειχθεί.

ΛΗΜΜΑ 2.

Δίνεται τετράπλευρο $ABCD$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O) και έστω τα σημεία $E \equiv AD \cap BC$ και $P \equiv AC \cap BD$. Η δια του σημείου P κάθετη ευθεία επί την AB, τέμνει τον περίκυκλο του τριγώνου ΔPCD, στο σημείο Q. Αποδείξτε ότι η ευθεία EQ περνάει από το κέντρο O του κύκλου (O).



ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

- Ορίζουμε το σημείο Q, ως το σημείο τομής της ευθείας EO, από τον περίκυκλο έστω (K) του τριγώνου Δ PCD και αρκεί ως ισοδύναμο ζητούμενο να αποδειχθεί ότι ισχύει $PQ \perp AB$.

Έστω το σημείο $Z \equiv AB \cap CD$ και ας είναι X, Y, τα σημεία τομής του κύκλου (O), από την ευθεία ZP, με το X έστω μεταξύ των Z, P.

Η ευθεία ZP, ταυτίζεται με την Πολική ευθεία του σημείου E ως προς τον κύκλο (O) και επομένως, είναι κάθετη επί την EO και έστω το σημείο $T \equiv EO \cap ZP$.

- Η σημειοσειρά Z, X, P, Y τώρα, είναι αρμονική και το T ταυτίζεται με το μέσον του XY, λόγω $OT \perp XY$.

Ισχύει : $(ZX)(ZY) = (ZP)(ZT)$,(1) γνωστό αποτέλεσμα στα αρμονικά συζυγή. (*)

Από (1) και $(ZX)(ZY) = (ZD)(ZC) \Rightarrow (ZP)(ZT) = (ZD)(ZC)$,(2) και επομένως, το σημείο T ανήκει στον κύκλο (K).

- Ισχύει : $\angle PDT = \angle PQT$,(3) και $\angle AZT = \angle CAB - \angle APZ = \angle CAB - \angle CPT$,(4)

Από (4) και $\angle CAB = \angle CDP$ και $\angle CPT = \angle CDT$ προκύπτει $\angle AZT = \angle PDT$,(5)

Από (3), (5) $\Rightarrow$ $\angle AZT = \angle PQT$,(6)

Από ,(6) και $QT \perp ZT \Rightarrow QP \perp ZA \equiv AB$ και το ισοδύναμο ζητούμενο για το **Λήμμα 2** έχει αποδειχθεί.