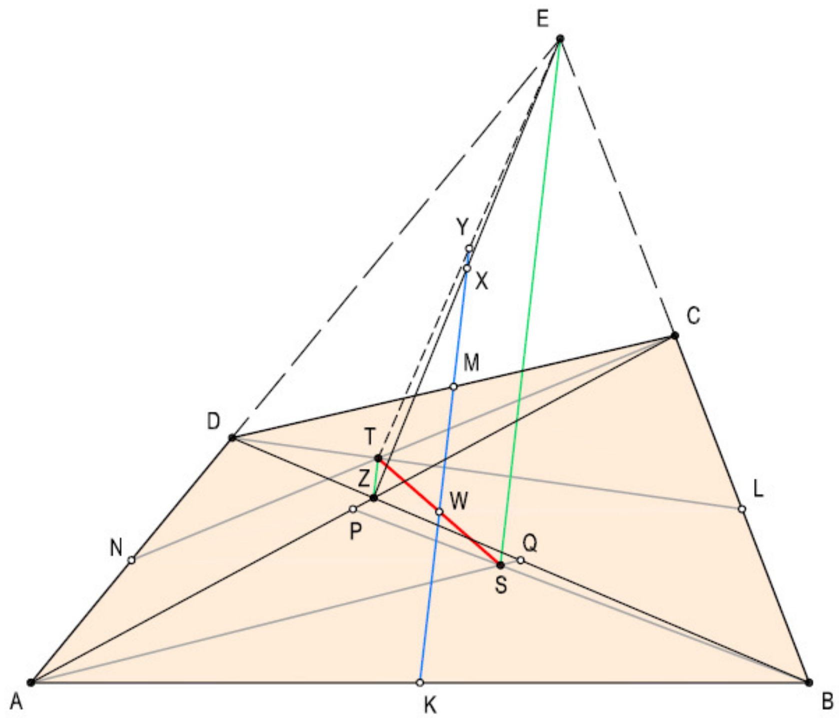
Romantics of Geometry – PROBLEM 1274.

Δίνεται τετράπλευρο $ABCD$ και έστω $K, L, M, N, P, Q,$ τα μέσα των AB, BC, CD, DA, AC, BD αντιστοίχως και έστω τα σημεία $S \equiv AQ \cap BP$ και $T \equiv CN \cap LD$. Αποδείξτε ότι η ευθεία KM περνάει από το μέσον W, του τμήματος ST.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

- Έστω το σημείο $Z \equiv AC \cap BD$ και σύμφωνα με το παρακάτω **Λήμμα 1**, έχουμε ότι $TZ \,//\, KM$,(1)

Έστω το σημείο $X \equiv EZ \cap KM$ και σύμφωνα με το **Θεώρημα Gauss-Newton**, το σημείο αυτό ταυτίζεται με το μέσον του EZ, από το πλήρες τετράπλευρο $EDZCAB$ και έστω το σημείο $Y \equiv ET \cap KM$, ως το μέσον του ET λόγω της (1) (προφανές).

Σύμφωνα με το παρακάτω **Λήμμα 2**, έχουμε ότι $ES \,//\, KM$,(2)

Στό τρίγωνο ΔTES τώρα, η ευθεία $YX \equiv KM \,//\, ES$, περνάει από το μέσον έστω W του τμήματος ST και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΛΗΜΜΑ 1.

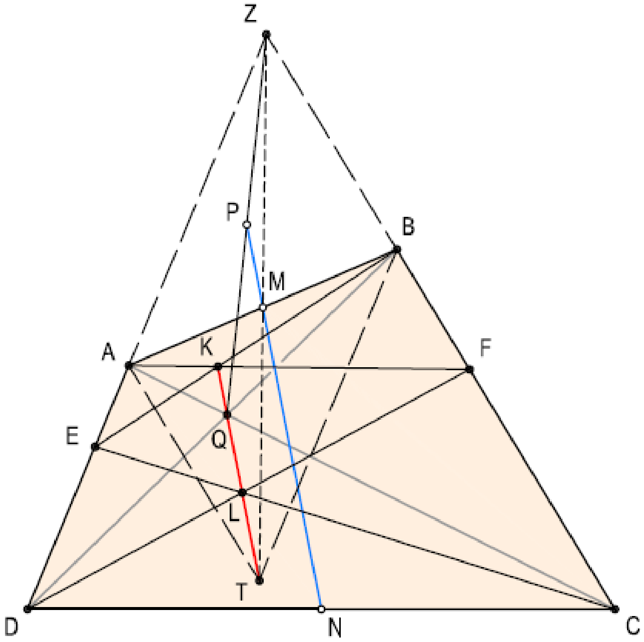
Δίνεται τετράπλευρο $ABCD$ και έστω τα σημεία E, F, επί των πλευρών του AD, BC αντιστοίχως, ώστε να είναι $AE \div ED = BF \div FC$. Αποδείξτε ότι η ευθεία που συνδέει τα σημεία $K \equiv AF \cap BE$ και $L \equiv CE \cap DF$ είναι παράλληλη προς την ευθεία που συνδέει τα μέσα M, N, των AB, CD, αντιστοίχως.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

- Έστω το σημείο $Q \equiv AC \cap BD$ και σύμφωνα με το **θεώρημα Πάππου**, το σημείο αυτό ανήκει στην ευθεία KL, θεωρώντας τις τριάδες των σημείων A, E, D και B, F, C, επί των AD, BC.

Έστω το σημείο $Z \equiv AD \cap BC$ και ας είναι P, το μέσον του ZQ.

Τα σημεία P, M, N, είναι συνευθειακά, σύμφωνα με το **Θεώρημα Gauss-Newton**, στο πλήρες τετράπλευρο $ZAQBCD$.



Έστω το σημείο T, ως το συμμετρικό σημείο του Z ως προς το M και έχουμε διαμορφώσει έτσι το τρίγωνο ΔZQT, για το οποίο ισχύει $QT \parallel PM \equiv MN$, λόγω των μέσων P, M, των πλευρών του ZQ, ZT, αντιστοίχως.

Αρκεί τώρα να αποδειχθεί ότι η ευθεία QT ταυτίζεται με την ευθεία KL.

- Το τετράπλευρο $ZATB$ είναι παραλληλόγραμμο (προφανές).

Από $AT \parallel ZB \equiv BC \Rightarrow (A.BFCT) = (B, F, C)$,(1)

Από $BT \parallel ZA \equiv AD \Rightarrow (B.AEDT) = (A, E, D)$,(2)

Από την εκφώνηση έχουμε $\dfrac{AE}{ED} = \dfrac{BF}{FC} \Rightarrow \dfrac{DA}{DE} = \dfrac{CB}{CF} \Rightarrow (A, E, D) = (B, F, C)$,(3)

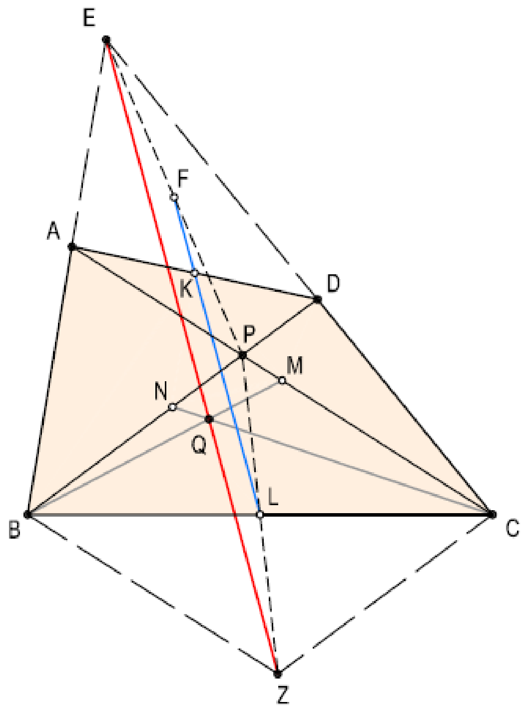
Από (1), (2), (3) $\Rightarrow (A.BFCT) = (B.AEDT)$,(4)

Από την (4) και επειδή οι δέσμες $A.BFCT, B.AEDT$, έχουν την $AB \equiv BA$ ως κοινή ακτίνα τους, συμπεραίνεται ότι τα σημεία $K \equiv AF \cap BE$ και $Q \equiv AC \cap BD$ και $T \equiv AT \cap BT$ είναι συνευθειακά και επομένως οι ευθείες KQL και $KQT \parallel QT$ ταυτίζονται γιατί έχουν δύο κοινά σημεία και το **Λήμμα 1** έχει αποδειχθεί.

- **ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΑΠΠΟΥ**: Επί δύο δοσμένων ευθειών $(\varepsilon), (\varepsilon')$, θεωρούμε τις τριάδες των σημείων A, B, C και A', B', C', αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι τα σημεία $P \equiv AB' \cap A'B$ και $Q \equiv AC' \cap A'C$ και $R \equiv BC' \cap B'C$ είναι συνευθειακά.
- Είναι αξιοσημείωτο, ότι το θεώρημα αυτό αληθεύει σε κάθε περίπτωση συσχετισμού των δοσμένων ευθειών $(\varepsilon), (\varepsilon')$ μεταξύ τους, αλλά και για οποιαδήποτε διάταξη των τριάδων σημείων A, B, C και A', B', C' επί αυτών.

ΛΗΜΜΑ 2.

Δίνεται τετράπλευρο $ABCD$ και έστω τα σημεία $E \equiv AB \cap CD$, $P \equiv AC \cap BD$ και ας είναι M, N, τα μέσα των AC, BD, αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι $EQ // KL$ όπου $Q \equiv BM \cap CN$ και K, L, είναι τα μέσα των AD, BC, αντιστοίχως.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

Έστω F, το μέσον του EP και στο πλήρες τετράπλευρο $EAPDBC$, έχουμε ότι τα σημεία F, K, L, ανήκουν στην ίδια ευθεία, σύμφωνα με το **θεώρημα Gauss-Newton**.

Έστω Z, το συμμετρικό σημείο του P ως προς το μέσον L του BC και από $EZ // FL$, αρκεί ως ισοδύναμο ζητούμενο, να αποδειχθεί το σημείο Q ανήκει στην ευθεία EZ.

Από το σημείο L, ως κοινό μέσον των BC, PZ, έχουμε ότι το $PBZC$ είναι παραλληλόγραμμο.

Από $AC // BZ$ και $AM = MC$, προκύπτει ότι η δέσμη $B.AMCZ$ είναι αρμονική.

Ομοίως, από $DB // CZ$ και $DN = NB$, προκύπτει ότι η δέσμη $C.DNBZ$ είναι επίσης αρμονική.

Ως αρμονικές, οι δέσμες αυτές έχουν ίσους Διπλούς λόγους και άρα, ισχύει:

$$(B.AMCZ) = (C.DNBZ) \quad ,(1)$$

Από (1) και επειδή οι δέσμες αυτές έχουν την $BC \equiv CB$ ως κοινή ακτίνα τους, συμπεραίνεται ότι τα σημεία $E \equiv BA \cap CD$ και $Q \equiv BM \cap CN$ και $Z \equiv BZ \cap CZ$, είναι συνευθειακά και το ισοδύναμο ζητούμενο για το **Λήμμα 2** έχει αποδειχθεί.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ.

(1) – Η πρόταση αυτή υπάρχει ως προτεινόμενο πρόβλημα 1274, στην ομάδα **Romantics of Geometry** του Facebook που δημιούργησε και διαχειρίζεται ο **Παναγιώτης Χρονόπουλος.**
https://www.facebook.com/groups/parmenides52/permalink/1447907345322967/

(2) – Το **Λήμμα 1** έχει δημοσιευτεί παλιότερα στο φόρουμ **AoPS.**
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t316f6h133248

(3) – Το **Λήμμα 2** έχει δημοσιευτεί παλιότερα στο φόρουμ **mathematica.gr.**
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=112&t=31967