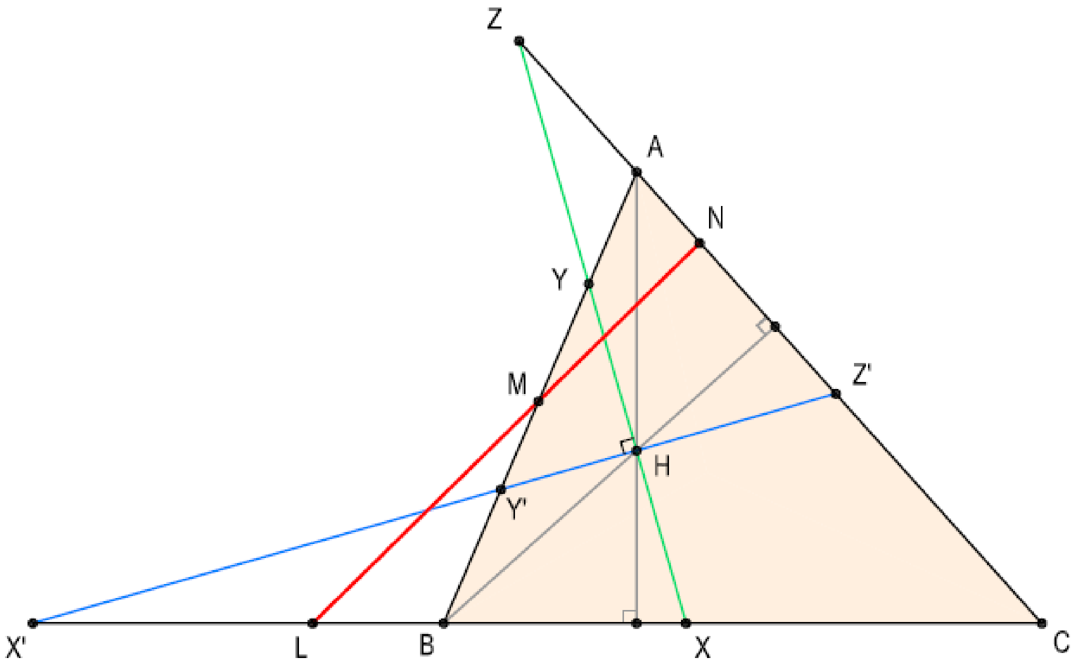
ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ DROZ-FARNY.

Δια του ορθοκέντρου H δοσμένου τριγώνου $\triangle ABC$, θεωρούμε δύο τυχούσες ευθείες κάθετες μεταξύ τους, οι οποίες τέμνουν η μεν πρώτη τις ευθείες των πλευρών BC, AB, AC, στα σημεία X, Y, Z αντιστοίχως και η δεύτερη τις ίδιες ευθείες στα σημεία X', Y', Z', αντιστοίχως. Εάν L, M, N, είναι εσωτερικά (ή εξωτερικά) σημεία των τμημάτων X, X' και Y, Y' και Z, Z' αντιστοίχως, τέτοια ώστε να ισχύει $(LX \div LX') = (MY \div MY') = (NZ \div NZ')$, αποδείξτε ότι τα σημεία L, M, N, είναι συνευθειακά.



Στην ειδική περίπτωση όπου τα σημεία L, M, N, ταυτίζονται με τα μέσα των τμημάτων XX', YY', ZZ' αντιστοίχως, έχουμε την γνωστή ως **Θεώρημα Droz-Farny** πρόταση, η οποία πρωτο-δημοσιεύτηκε από τον Ελβετό Μαθηματικό **Arnold Droz** (1856 – 1912) χωρίς απόδειξη το 1899. Το δεύτερο συνθετικό (**Farny**) στην ονοματοδοσία του ως άνω θεωρήματος, αναφέρεται στην συμπατριώτισσα σύζυγό του.

Η ως άνω γενίκευση του **Θεωρήματος Droz-Farny**, οφείλεται στον **Floor van Lamoen** και πρωτοεμφανίστηκε χωρίς απόδειξη το 2004 στο φόρουμ **Hyacinthos** του **Αντρέα χατζηπολάκη.**

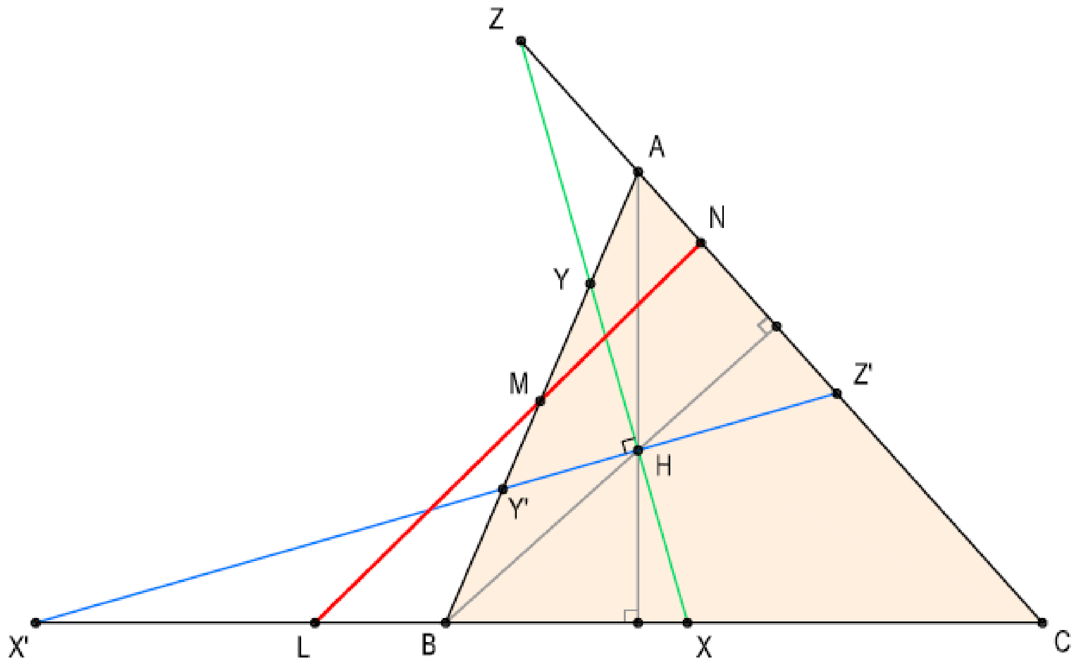
https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/10716

Η απόδειξη που ακολουθεί δημοσιεύτηκε στο φόρουμ **mathematica.gr**, όπου ο αναγνώστης θα βρει μία διανυσματική απόδειξη από τον **Δημήτρη Σκουτέρη**, αλλά και μία άλλη συνθετική απόδειξη που οφείλεται στον **Στάθη Κούτρα.**

https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=185&t=56074

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ DROZ-FARNY.

Δια του ορθοκέντρου H δοσμένου τριγώνου $\triangle ABC$, θεωρούμε δύο τυχούσες ευθείες κάθετες μεταξύ τους, οι οποίες τέμνουν η μεν πρώτη τις ευθείες των πλευρών BC, AB, AC, στα σημεία X, Y, Z αντιστοίχως και η δεύτερη τις ίδιες ευθείες στα σημεία X', Y', Z', αντιστοίχως. Εάν L, M, N, είναι εσωτερικά (ή εξωτερικά) σημεία των τμημάτων X, X' και Y, Y' και Z, Z' αντιστοίχως, τέτοια ώστε να ισχύει $(LX \div LX') = (MY \div MY') = (NZ \div NZ')$, αποδείξτε ότι τα σημεία L, M, N, είναι συνευθειακά.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

Στο τρίγωνο $\triangle CXZ$ με διατέμνουσα την AYB, σύμφωνα με το **θεώρημα Μενελάου**, έχουμε:

$$\frac{YX}{YZ} \cdot \frac{AZ}{AC} \cdot \frac{BC}{BX} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{YX}{YZ} = \frac{AC}{AZ} \cdot \frac{BX}{BC} \qquad (1)$$

Ομοίως, στο τρίγωνο $\triangle CX'Z'$ με διατέμνουσα την $AY'B$, έχουμε:

$$\frac{Y'X'}{Y'Z'} \cdot \frac{AZ'}{AC} \cdot \frac{BC}{BX'} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{Y'X'}{Y'Z'} = \frac{AC}{AZ'} \cdot \frac{BX'}{BC} \qquad (2)$$

Σύμφωνα με το παρακάτω **Λήμμα**, έχουμε: $\frac{AZ}{AZ'} = \frac{BX}{BX'} \;\Rightarrow\; \frac{BX}{AZ} = \frac{BX'}{AZ'} \qquad (3)$

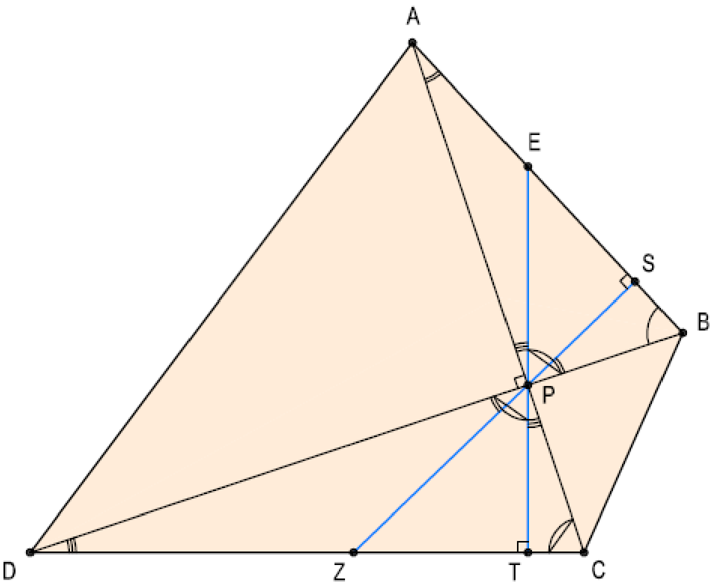
$$\text{Από } (1), (2), (3) \Rightarrow \frac{YX}{YZ} = \frac{Y'X'}{Y'Z'} \qquad (4)$$

Από (4) τώρα, στο μη κυρτό τετράπλευρο $XZZ'X'$, σύμφωνα με το **Θεώρημα των ίσων λόγων στο τετράπλευρο** (αγγλιστί **ERIQ theorem**), συμπεραίνεται ότι τα σημεία L, M, N είναι συνευθειακά και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

● Η απόδειξη αυτή είναι αφιερωμένη στον **Tran Quang Hung.**

ΛΗΜΜΑ.

Δίνεται τετράπλευρο $ABCD$ με $AC \perp BD$ και $P \equiv AC \cap BD$ και ας είναι S, T, οι προβολές του σημείου P επί των AB, CD, αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι $EA \div EB = ZC \div ZD$, όπου $E \equiv AB \cap PT$ και $Z \equiv CD \cap PS$.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

Από $\angle PAE = \angle BPS = \angle DPZ$ και $\angle APE = \angle CPT = \angle PDZ$ προκύπτει ότι τα τρίγωνα $\triangle PAE$, $\triangle DPZ$ είναι όμοια και άρα έχουμε:

$$\frac{EA}{ZP} = \frac{EP}{ZD} \Rightarrow (EA)(ZD) = (EP)(ZP) \qquad (1)$$

Ομοίως, από $\angle PBE = \angle APS = \angle CPZ$ και $\angle BPE = \angle DPT = \angle PCZ$ τα τρίγωνα $\triangle PAE$, $\triangle DPZ$ είναι όμοια και άρα έχουμε:

$$\frac{EB}{ZP} = \frac{EP}{ZC} \Rightarrow (EB)(ZC) = (EP)(ZP) \qquad (2)$$

Από (1), (2) $\Rightarrow (EA)(ZD) = (EB)(ZC) \Rightarrow \dfrac{EA}{EB} = \dfrac{ZC}{ZD}$ και το **Λήμμα** έχει αποδειχθεί.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ.

(1) - **A Purely Synthetic Proof of the Droz-Farny Line Theorem** , υπό Jean-Louis Ayme.
http://forumgeom.fau.edu/FG2004volume4/FG200426.pdf

(2) - **A Proof of Lamoen's Generalization of the Droz-Farny Theorem** , υπό Cosmin Pohoata και Son Hong Ta.
http://geometry.ru/articles/short-Droz-Farny.pdf

(3) - http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/Docs/La%20droite%20de%20Droz-Farny.pdf

(4) - Περαιτέρω γενικεύσεις του **Θεωρήματος Droz-Farny**, όπου το σημείο H είναι τυχόν σημείο και όχι απαραίτητα το ορθόκεντρο του δοσμένου τριγώνου.
http://en.wikipedia.org/wiki/Droz-Farny_line_theorem