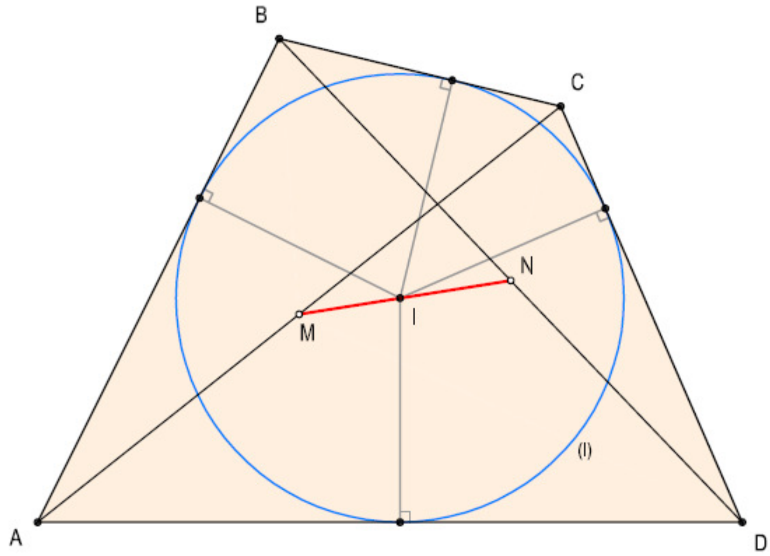
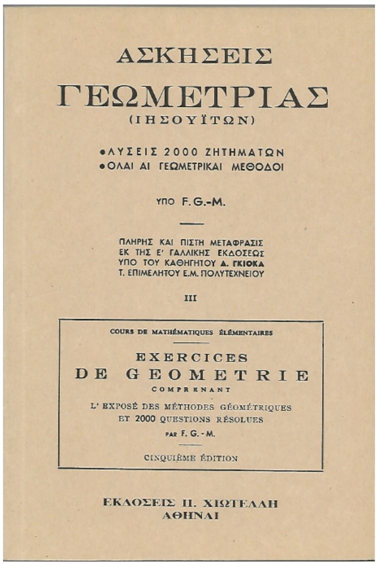
ΘΕΩΡΗΜΑ NEWTON (b).

Σε κάθε περιγράψιμο τετράπλευρο το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του, ανήκει στην ευθεία που συνδέει τα μέσα των διαγωνίων του.



Το θεώρημα αυτό έρχεται από το παρελθόν και ως προς την ελληνική βιβλιογραφία, ο αναγνώστης θα το βρει και στη σελίδα 809 του βιβλίου ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ F.G.M. (Ιησουϊτών), Εκδόσεις Α. ΚΑΡΑΒΙΑ, Αθήνα 1952.

Η απόδειξη που εμφανίζεται εκεί, βασίζεται (άμεσα) στην ιδέα ότι η ευθεία που συνδέει τα μέσα των διαγωνίων σε τυχόν τετράπλευρο, είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τα οποία με βάσεις τις απέναντι πλευρές του τετραπλεύρου, ορίζουν τρίγωνα με το ίδιο άθροισμα εμβαδών.



Εάν δηλαδή, I είναι ένα τυχόν σημείο της ευθείας MN, τότε ισχύει $(IAD)+(IBC)=(IAB)+(ICD)$, το οποίο αληθεύει προφανώς στο περιγράψιμο τετράπλευρο, αφού ισχύει $AD+BC=AB+CD$.

Η απόδειξη που ακολουθεί, για το ως άνω θεώρημα, έχει δημοσιευτεί στο φόρουμ **mathematica.gr**.

https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=62&t=31445&start=6

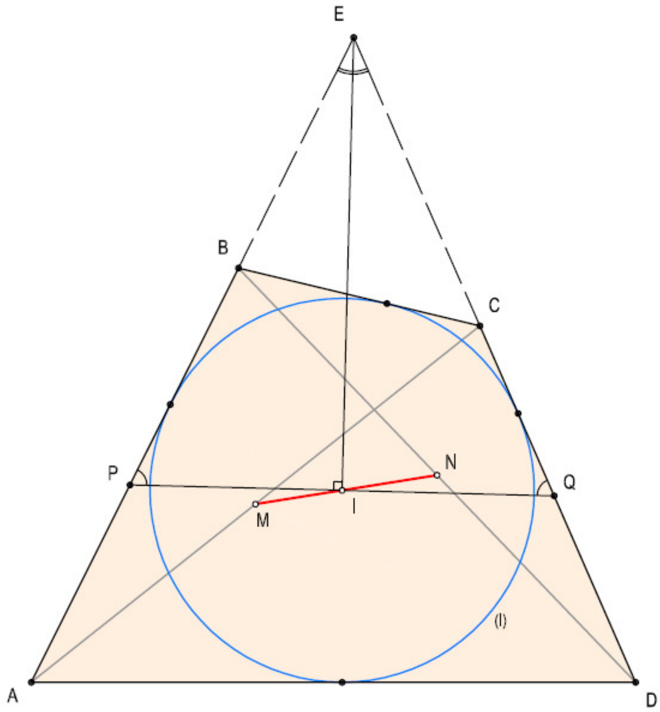
Ένα άλλο θεώρημα που σχετίζεται με το περιγράψιμο τετράπλευρο και οφείλεται επίσης στον **Newton**, είναι το εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ NEWTON (a).

Σε κάθε περιγράψιμο τετράπλευρο οι ευθείες που συνδέουν τα σημεία επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου του, στις απέναντι πλευρές, περνάνε από το σημείο τομής των δαγωνίων του.

ΘΕΩΡΗΜΑ NEWTON (b).

Σε κάθε περιγράψιμο τετράπλευρο το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του, ανήκει στην ευθεία που συνδέει τα μέσα των διαγωνίων του.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

Έστω M, N, τα μέσα των διαγωνίων AC, BD αντιστοίχως και ας είναι E, το σημείο τομής των ευθειών AB, CD.

Δια του έγκεντρου I του $ABCD$, φέρνουμε την κάθετη ευθεία επί την EI, η οποία τέμνει τις AB, CD στα σημεία P, Q αντιστοίχως και ισχύει $IP = IQ$ $\quad (1)$ λόγω της EI ως διχοτόμου της γωνίας $\angle AED$.

Σύμφωνα με το παρακάτω **Λήμμα,** έχουμε:

$$(AP)(QD) = (IP)^2 = (IQ)^2 = (PB)(CQ) \Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{CQ}{QD} \qquad (2)$$

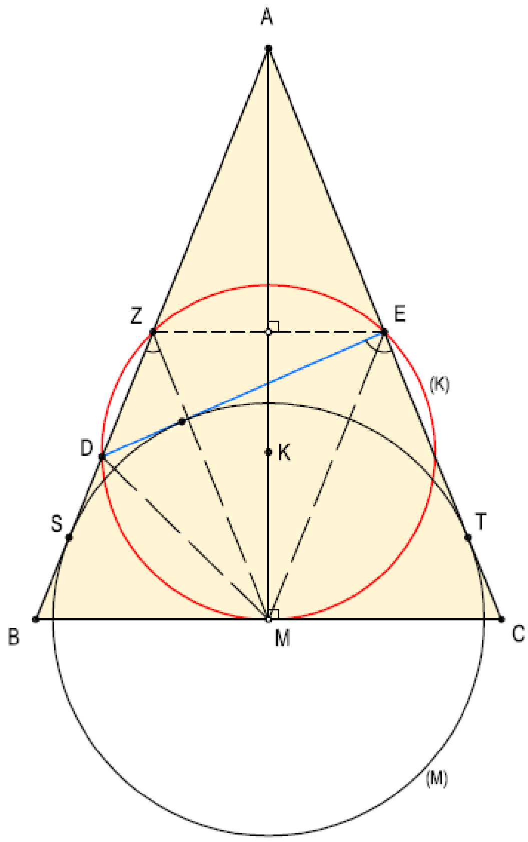
Από την (2), στο μη κυρτό τετράπλευρο $ABDC$ με $IP = IQ$ και $MA = MC$ και $NB = ND$, σύμφωνα με το **Θεώρημα των ίσων λόγων στο τετράπλευρο**, (*) συμπεραίνεται ότι τα σημεία M, I, N, ανήκουν στην ίδια ευθεία και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

Συμπεραίνεται επίσης ότι ισχύει $\dfrac{MI}{IN} = \dfrac{AP}{PQ} = \dfrac{CQ}{QD}$

(*) Το γνωστό αυτό θεώρημα το έχω ονοματίσει αγγλιστί **ERIQ theorem** (**E**uqual **R**atios **I**n **Q**uadrilateral), αλλά δεν μπόρεσα να σκεφτώ κάτι αντίστοιχο στα ελληνικά.

ΛΗΜΜΑ.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΔABC με $AB = AC$ και έστω M, το μέσον της πλευράς του BC. Με κέντρο το σημείο M γράφουμε τον κύκλο (M) ο οποίος εφάπτεται των πλευρών AB, AC, στα σημεία S, T, αντιστοίχως. Τυχούσα εφαπτομένη του κύκλου (M), τέμνει τις ευθείες AB, AC στα σημεία έστω D, E, αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι $(BD)(CE) = (MB)^2 = (MC)^2$.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

Έστω Z, το συμμετρικό σημείο του E ως προς την ευθεία AM και ισχύει προφανώς $BZ = CE$ (1)

Από $\angle DZM = \angle MEC$ λόγω συμμετρίας του σχήματος και $\angle MEC = \angle DEM$ γιατί το σημείο M ταυτίζεται με το $A-$παράκεντρο του τριγώνου $\triangle ADE$, προκύπτει ότι $\angle DZM = \angle DEM$ (2)

Από (2) συμπεραίνεται ότι το τετράπλευρο $DMEZ$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο έστω (K), ο οποίος εφάπτεται της πλευράς BC στο σημείο M, λόγω του ισοσκελούς τριγώνου $\triangle MEZ$ και $BC \perp MA$ με $MA \equiv MK$, όπου K είναι το κέντρο του κύκλου (K).

Άρα, ισχύει $(BD)(BZ) = (BM)^2$ (3)

Από (1), (3) $\Rightarrow$ $(BD)(CE) = (MB)^2 = (MC)^2$ και το **Λήμμα** έχει αποδειχθεί.

● Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται το ζητούμενο, εάν η εφαπτομένη του κύκλου (M) τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών του δοσμένου ισοσκελούς τριγώνου $\triangle ABC$.