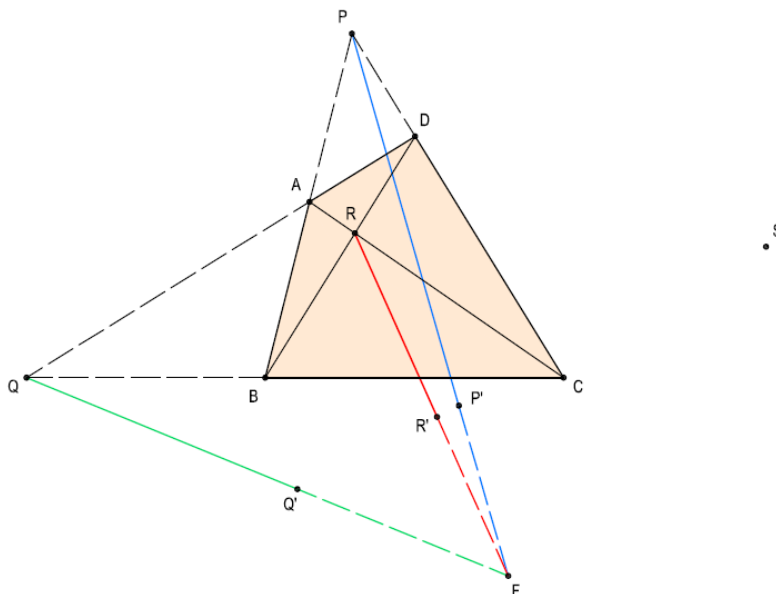


ΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΙ ΣΥΝΤΡΕΧΟΥΣΕΣ ΠΟΛΙΚΕΣ.

Έστω S τυχόν σημείο στο επίπεδο δοσμένου τετραπλεύρου $ABCD$ και έστω τα σημεία $P \equiv AB \cap CD$ και $Q \equiv AD \cap BC$ και $R \equiv AC \cap BD$. Αποδείξτε ότι οι Πολικές ευθείες PP', QQ', RR' , του σημείου S , ως προς τα ζεύγη των ευθειών PA, PD και QA, QB και RC, RD αντιστοίχως, τέμνονται στο ίδιο σημείο.



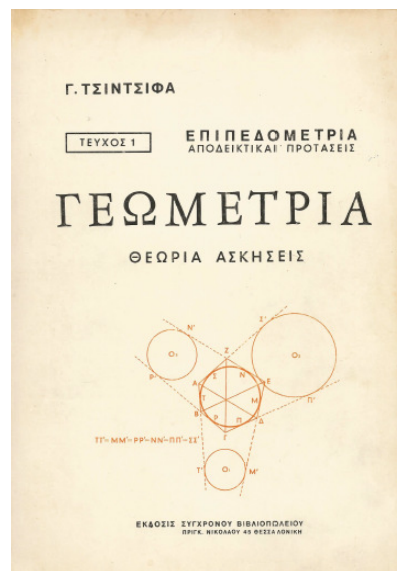
Η πρόταση αυτή υπάρχει ως προτεινόμενη άσκηση 988, στην σελίδα 275 του βιβλίου επιπεδομετρίας του Γ. ΤΣΙΝΤΣΙΦΑ.

Το βιβλίο αυτό εκδόθηκε στην Θεσσαλονίκη πριν πενήντα περίπου χρόνια, για τους υποψήφιους των εισαγωγικών εξετάσεων στις Φυσικομαθηματικές και Πολυτεχνικές σχολές της εποχής.

Δυσεύρετο σήμερα στα παλαιοπωλεία, είναι ξεχωριστό απόκτημα για τους ερασιτέχνες συλλέκτες, καθώς περιέχει αρκετά ενδιαφέροντα (ενίοτε δύσκολα) προβλήματα Γεωμετρίας λυμένα ή προτεινόμενα για λύση. Δεν γνωρίζω εάν έχει εκδοθεί βιβλίο με τις λύσεις των προτεινομένων ασκήσεων.

Για τον διεθνώς γνωστό μαθηματικό **Γιώργο Τσίτσιφα**, μπορεί ο αναγνώστης να βρει αρκετό υλικό δημοσιευμένο στην ιστοσελίδα του, που αφορά σε πρωτότυπες εργασίες του στα Μαθηματικά.

<https://gtsintsifas.com/>

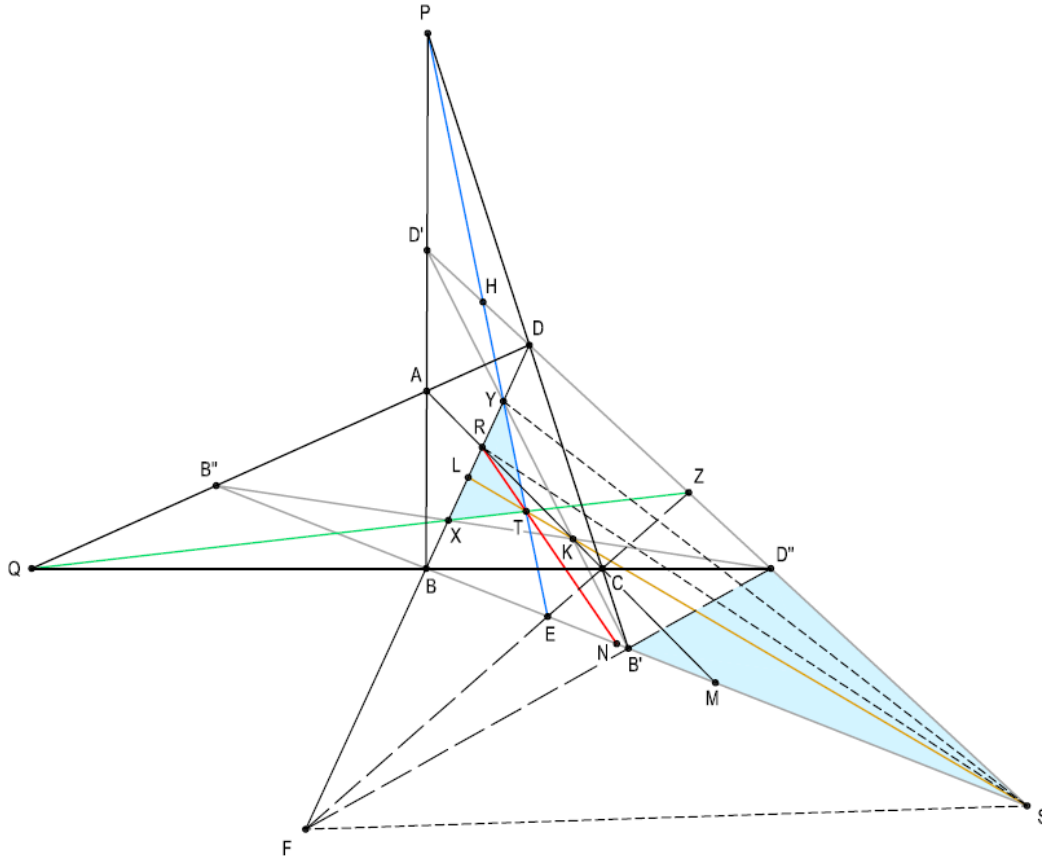


Η απόδειξη που ακολουθεί, έχει δημοσιευτεί παλιότερα στο φόρουμ **mathematica.gr**

<https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=112&t=30571>

ΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΙ ΣΥΝΤΡΕΧΟΥΣΕΣ ΠΟΛΙΚΕΣ.

Έστω S τυχόν σημείο στο επίπεδο δοσμένου τετραπλεύρου $ABCD$ και έστω τα σημεία $P \equiv AB \cap CD$ και $Q \equiv AD \cap BC$ και $R \equiv AC \cap BD$. Αποδείξτε ότι οι Πολικές ευθείες PP', QQ', RR' , του σημείου S , ως προς τα ζεύγη των ευθειών PA, PD και QA, QB και RC, RD αντιστοίχως, τέμνονται στο ίδιο σημείο.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

● Έστω το σημείο $B' \equiv CD \cap SB$ και ας είναι E , το σημείο μεταξύ των B, B' , ως το αρμονικό συζυγές του S , ως προς τα σημεία B, B' .

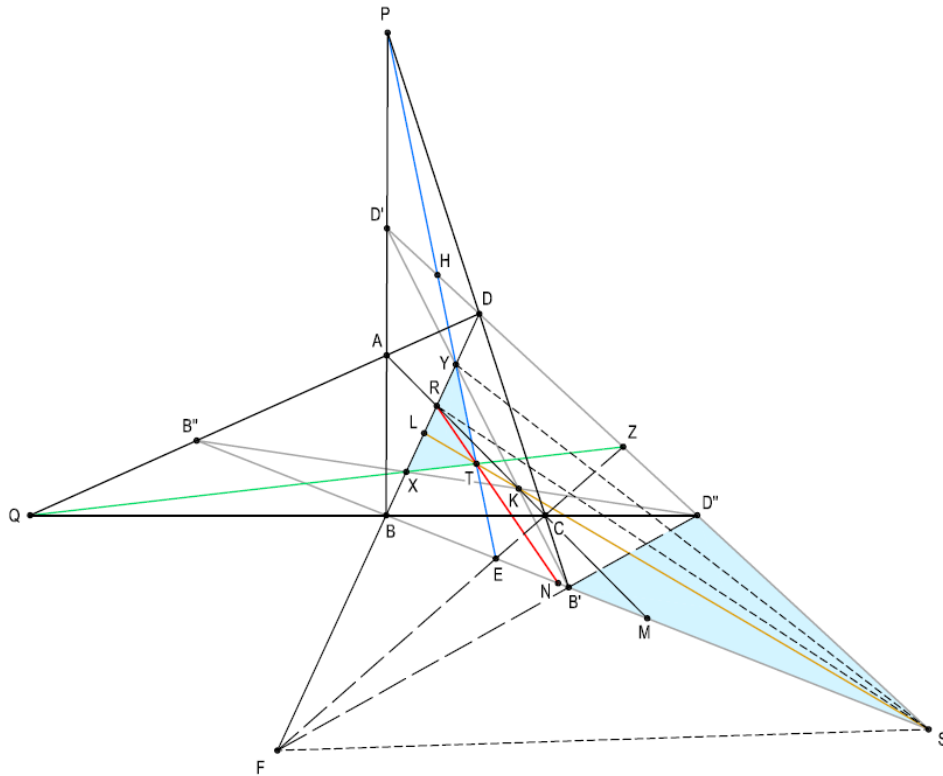
Η ευθεία PE τότε, ταυτίζεται με την Πολική ευθεία του σημείου S , ως προς τις ευθείες PA, PD .

Ομοίως, η ευθεία QZ ταυτίζεται με την Πολική ευθεία του σημείου S , ως προς τις ευθείες QA, QB , όπου $D'' \equiv BC \cap SD$ και Z , το σημείο μεταξύ των D, D'' , ως το αρμονικό συζυγές του S , ως προς τα σημεία D, D'' .

Έστω το σημείο $T \equiv PE \cap QZ$ και αρκεί ως ισοδύναμο ζητούμενο, να αποδειχθεί ότι η ευθεία RT ταυτίζεται με την Πολική ευθεία του σημείου S , ως προς τις ευθείες RC, RD .

Έστω το σημείο $B'' \equiv AD \cap SB$ και έχουμε ότι το σημείο $X \equiv BD \cap B''D''$ ανήκει στην ευθεία QZ , ως την Πολική ευθεία του σημείου S , ως προς τις ευθείες QA, QB .

Ομοίως, έστω το σημείο $D' \equiv AB \cap SD$ και έχουμε ότι το σημείο $Y \equiv BD \cap B'D'$ ανήκει στην ευθεία PE ως την Πολική ευθεία του σημείου S , ως προς τις ευθείες PA, PD .



- Θα αποδείξουμε πρώτα ότι τα σημεία T , $K \equiv B'D' \cap B''D''$, S είναι συνευθειακά.

Από τις αρμονικές σημειοσειρές S, B', E, B και S, D'', Z, D , έχουμε ότι η ευθεία EZ περνάει από το σημείο C καθώς επίσης και ότι οι ευθείες $BD, EZ, B'D''$, τέμνονται στο ίδιο σημείο, έστω το F .

Από τα συνευθειακά σημεία τώρα, $Z \equiv SD'' \cap TX$ και $E \equiv SB' \cap TY$ και $F \equiv B'D'' \cap YX$, σύμφωνα με το **Θεώρημα Desargues**, συμπεραίνεται ότι τα τρίγωνα $\triangle SB'D''$, $\triangle TYX$ είναι προοπτικά και άρα, οι ευθείες $ST, B'Y, D''X$ τέμνονται στο ίδιο σημείο.

Δηλαδή, το σημείο $K \equiv B'Y \cap D''X \Rightarrow K \equiv B'D' \cap B''D''$, ανήκει στην ευθεία ST .

Αλλά, το σημείο K , σύμφωνα με το **Θεώρημα Πάππου**, ανήκει επίσης στην ευθεία AC , θεωρουμένων των τριάδων σημείων B'', B, B' και D', D, D'' , επί των ευθειών SB, SD αντιστοίχως και τα πράγματα τώρα απλουστεύονται.

- Πράγματι, έχουμε διαμορφώσει το πλήρες τετράπλευρο $PDYD'BB'$ στο οποίο η σημειοσειρά S, D, H, D' είναι αρμονική και άρα η δέσμη $Y.SDHD'$ είναι επίσης αρμονική, όπου $H \equiv DD' \cap PE$.

Η δέσμη αυτή τέμνεται από την ευθεία ST και προκύπτει έτσι η αρμονική σημειοσειρά S, K, T, L , όπου $L \equiv BD \cap ST$ και επομένως, η δέσμη $R.SKTL$ είναι αρμονική.

Τέλος, η αρμονική δέσμη $R.SKTL$ τεμνόμενη από την ευθεία SB μας δίνει την αρμονική σημειοσειρά S, M, N, B , όπου $M \equiv SB \cap RK$ με $RK \equiv RC$ και $N \equiv SB \cap RT$.

Η ευθεία RTN τώρα, που συνδέει το R με το σημείο N , ως το αρμονικό συζυγές του S ως προς τα σημεία B, M , ταυτίζεται με την Πολική ευθεία του σημείου S ως προς τις ευθείες $RB \equiv RD$, $RM \equiv RC$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.