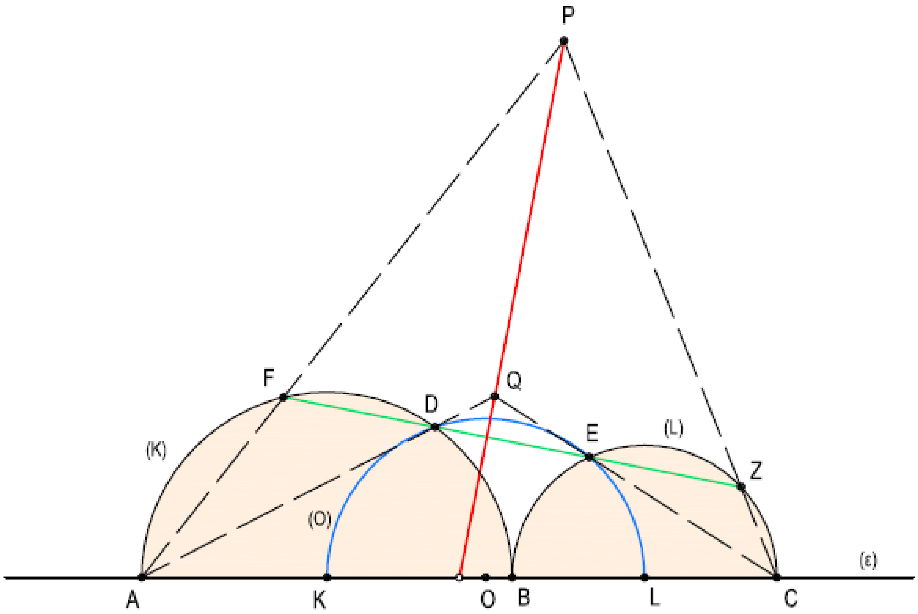
ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΗΜΙΚΥΚΛΙΑ - ΠΡΟΤΑΣΗ 1

Επί ευθείας (ε) δίνεται η σημειοσειρά $A, B, C,$ με το B μεταβλητό σημείο μεταξύ των A, C και έστω $(K), (L),$ τα ημικύκλια με διάμετρο AB, BC αντιστοίχως, προς το αυτό μέρος της (ε). Το ημικύκλιο έστω (O) με διάμετρο την διάκεντρο $KL,$ τέμνει τα ημικύκλια $(K), (L)$ στα σημεία D, E αντιστοίχως και έστω τα σημεία $F \equiv (K) \cap DE$ και $Z \equiv (L) \cap DE.$ Αποδείξτε ότι η μεταβλητή ευθεία που συνδέει τα σημεία $P \equiv AF \cap CZ$ και $Q \equiv AD \cap CE,$ περνάει από το μέσον του τμήματος $AC.$



ΣΗΜΕΙΩΣΗ (ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2021)

Η πρόταση αυτή πρωτοδημοσιεύτηκε στο **mathematica.gr**, τον Απρίλιο του 2009, χρονιά που αρχίζει η συμμετοχή μου στα δρώμενα αυτού του φόρουμ.

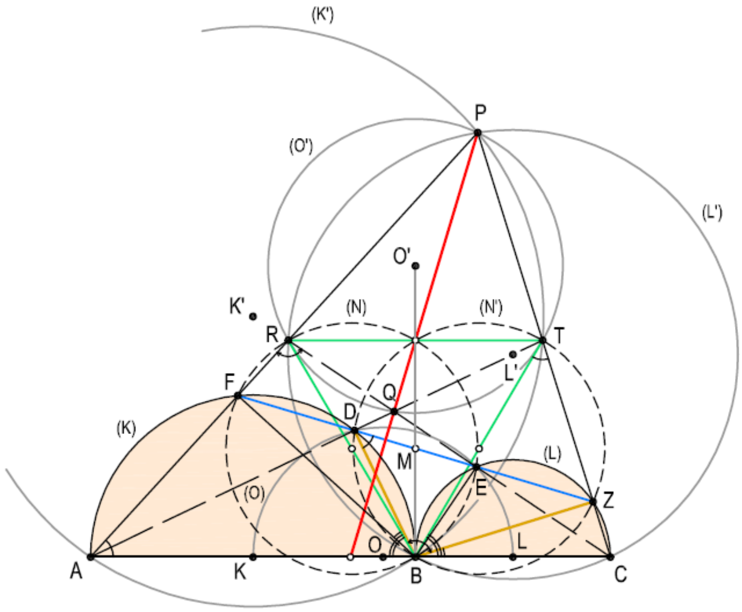
https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=112&t=1200

Η ανακάλυψή της όμως έρχεται από αρκετά νωρίτερα, από την εποχή προ υπολογιστή για μένα, όταν τα σχήματα κατασκευάζονταν με το χέρι.

Ακολούθησαν αργότερα (2014) στο ίδιο φόρουμ και άλλες προτάσεις σχετικές με το ίδιο βασικό σχήμα (εφαπτόμενα ημικύκλια) και υπάρχει πρόβλεψη να συγκεντρωθούν σε ενιαίο αρχείο, όλες μαζί οι δημοσιευμένες προτασεις, με γενικό τίτλο ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΗΜΙΚΥΚΛΙΑ.

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΗΜΙΚΥΚΛΙΑ - ΠΡΟΤΑΣΗ 1

Επί ευθείας (ε) δίνεται η σημειοσειρά $A, B, C,$ με το B μεταβλητό σημείο μεταξύ των A, C και έστω $(K), (L),$ τα ημικύκλια με διάμετρο AB, BC αντιστοίχως, προς το αυτό μέρος της (ε). Το ημικύκλιο έστω (O) με διάμετρο την διάκεντρο $KL,$ τέμνει τα ημικύκλια $(K), (L)$ στα σημεία D, E αντιστοίχως και έστω τα σημεία $F \equiv (K) \bigcap DE$ και $Z \equiv (L) \bigcap DE.$ Αποδείξτε ότι η μεταβλητή ευθεία που συνδέει τα σημεία $P \equiv AF \bigcap CZ$ και $Q \equiv AD \bigcap CE,$ περνάει από το μέσον του τμήματος $AC.$



1η ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Έστω τα σημεία $R \equiv PA \bigcap CQ$ και $T \equiv PC \bigcap AQ$ και αρκεί να αποδειχθεί ότι ισχύει $RT \parallel AC,$ οπότε λόγω του τετραπλεύρου $ARTC$ ως τραπεζίου, το ζητούμενο τότε έπεται.

Έστω $(N),$ $(N'),$ οι περίκυκλοι των εγγραψίμων τετραπλεύρων $BERF,$ $BDTZ,$ αντιστοίχως.

Από $\angle BTZ = \angle BDZ = \angle BAP$,(1) έχουμε ότι το τετράπλευρο $PABT$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο έστω (K') και ομοίως, από $\angle BRF = \angle BEF = \angle BCP$,(2) έχουμε ότι το τετράπλευρο $PCBR$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο έστω $(L').$

Το σημείο $B \equiv (K') \bigcap (L')$ τώρα, ταυτίζεται με το **Σημείο Miquel** στο πλήρες τετράπλευρο $PRQTAC$ και επειδή ανήκει στην ευθεία $AC,$ έχουμε ότι το τετράπλευρο $PRQT$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο έστω $(O').$

- Από τα εγγράψιμα τετράπλευρα $BDTZ,$ $ABDF,$ έχουμε $\angle ZBT = \angle ZDT = \angle ADF = \angle ABF$,(3)

Ομοίως, από τα εγγράψιμα $BERF,$ $BEZC,$ έχουμε $\angle ZBC = \angle ZEC = \angle FER = \angle FBR$,(4)

Από (3), (4) $\Rightarrow$ $\angle ZBT + \angle ZBC = \angle ABF + \angle FBR$ $\Rightarrow$ $\boxed{\angle CBT = \angle ABR}$,(5)

Από τα εγγράψιμα τετράπλευρα $BERF,$ $BDTZ,$ $PRQT,$ έχουμε $\angle DBZ = \angle DTP = \angle ERF$,(6)

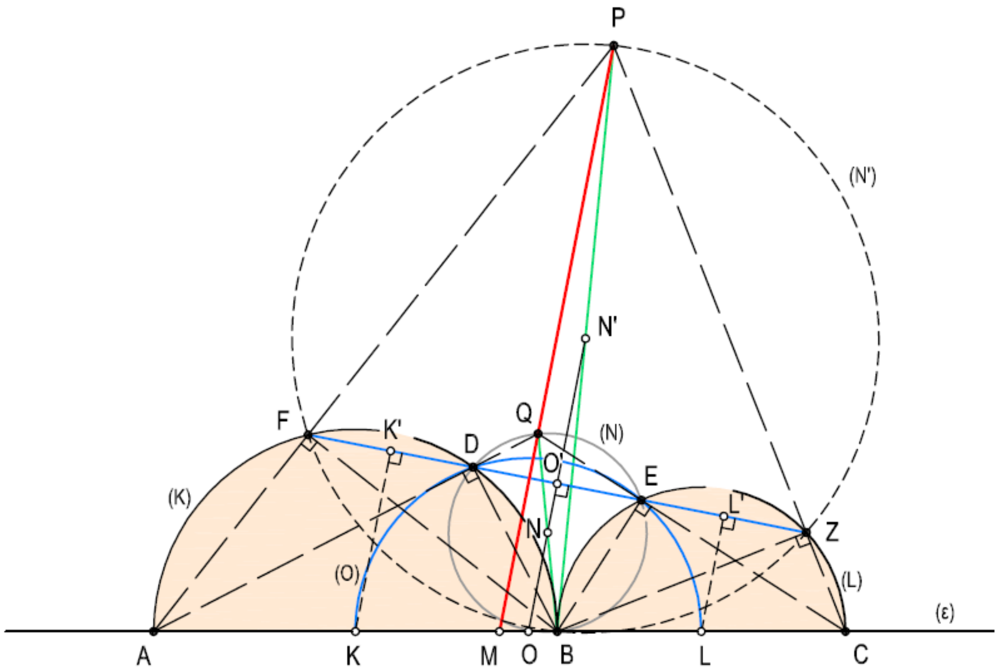
Από (6) και $DZ = EF,$ λόγω $DF = EZ$ (*), προκύπτει ότι οι κύκλοι $(N),$ (N') είναι ίσοι, ως οι περίκυκλοι των τριγώνων $\vartriangle DBZ,$ $\vartriangle ERF$ αντιστοίχως και άρα, ισχύει $\boxed{BR = BT}$, ως οι διάμετροι αυτών των ίσων κύκλων, λόγω $\angle BER = 90^{O} = \angle BFR$ και $\angle BDT = 90^{O} = \angle BZT.$

(*) Αποδεικνύεται εύκολα (βλέπε 2η απόδειξη παρακάτω).

• Άρα, για τα ίσα και ισοκλινή ως προς την ευθεία AC, λόγω της (5), ευθύγραμμα τμήματα BR, BT, συμπεραίνεται ότι ισχύει $RT \parallel AC$ και επομένως, στο τραπέζιο πλέον $ARTC$, η ευθεία PQ που συνδέει το σημείο P, τομής των ευθειών των μη παραλλήλων πλευρών του, με το σημείο Q, τομής των διαγωνίων του, περνάει από τα μέσα των βάσεών του RT, AC και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΗΜΙΚΥΚΛΙΑ - ΠΡΟΤΑΣΗ 1

Επί ευθείας (ε) δίνεται η σημειοσειρά A, B, C, με το B μεταβλητό σημείο μεταξύ των A, C και έστω $(K), (L)$, τα ημικύκλια με διάμετρο AB, BC αντιστοίχως, προς το αυτό μέρος της (ε). Το ημικύκλιο έστω (O) με διάμετρο την διάκεντρο KL, τέμνει τα ημικύκλια $(K), (L)$ στα σημεία D, E αντιστοίχως και έστω τα σημεία $F \equiv (K) \cap DE$ και $Z \equiv (L) \cap DE$. Αποδείξτε ότι η μεταβλητή ευθεία που συνδέει τα σημεία $P \equiv AF \cap CZ$ και $Q \equiv AD \cap CE$, περνάει από το μέσον του τμήματος AC.



2η ΑΠΟΔΕΙΞΗ

• Αποδεικνύεται εύκολα ότι το κέντρο O του κύκλου (O) με διάμετρο KL, ταυτίζεται με το μέσον του τμήματος MB, όπου M είναι το μέσον του AC.

$$(MA = MC \ \Rightarrow \ MK + MK + MB = MB + 2BL \ \Rightarrow \ MK = BL \ \Rightarrow \ OM = OB)$$

Έστω K', O', L', οι προβολές των K, O, L αντιστοίχως, επί της ευθείας FZ και έχουμε ότι το O' είναι κοινό μέσον των DE, FZ.

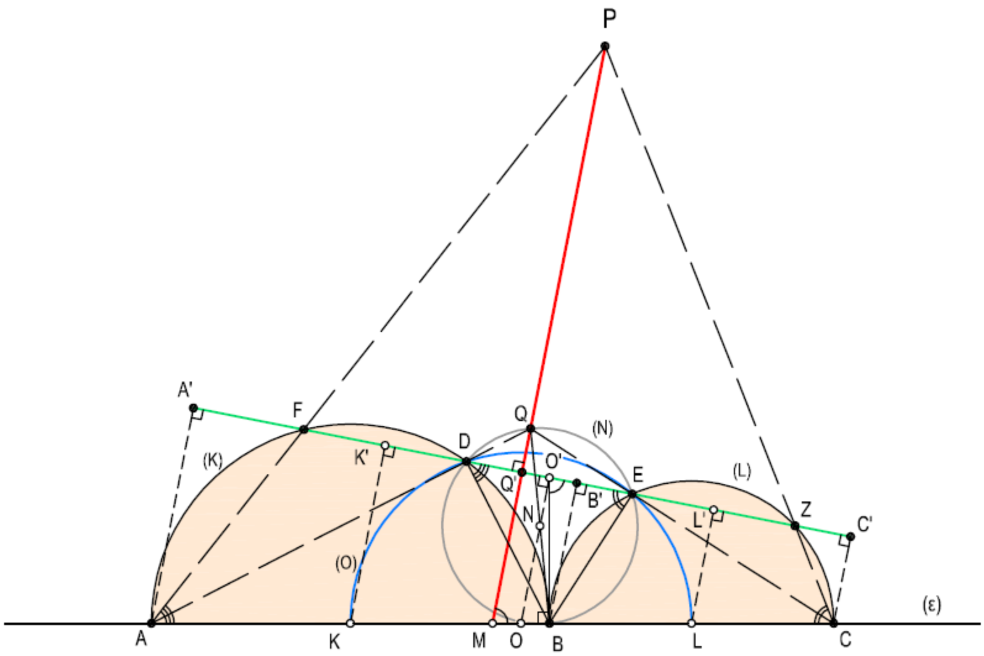
$$(\text{από τραπέζιο } KLL'K' \ \Rightarrow \ O'K' = O'L' \ \Rightarrow \ DK' = EL', \text{ λόγω } O'D = O'E, \ \Rightarrow \ O'F = O'Z)$$

• Στα εγγράψιμα τετράπλευρα $BDQE$ $(\angle BDQ = 90^o = \angle BEC)$ και $BFPZ$ $(\angle BFP = 90^o = \angle BZC)$ έχουμε ότι τα κέντρα έστω N, N', των περικύκλων τους (N), (N') αντιστοίχως, κείνται επί της ευθείας OO', ως κοινής μεσοκάθετης ευθείας των χορδών τους DE, FZ αντιστοίχως, με την DE ως χορδή επίσης του κύκλου (O).

Συμπεραίνεται έτσι, από $BO = OM$ και $BN = NQ$ (BQ, διάμετρος του κύκλου (N)) και $BN' = N'P$ (BP, διάμετρος του κύκλου (N')), σύμφωνα με το **Θεώρημα Θαλή**, ότι τα σημεία P, Q, M, ανήκουν στην ίδια ευθεία και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΗΜΙΚΥΚΛΙΑ - ΠΡΟΤΑΣΗ 1

Επί ευθείας (ε) δίνεται η σημειοσειρά A, B, C, με το B μεταβλητό σημείο μεταξύ των A, C και έστω $(K), (L)$, τα ημικύκλια με διάμετρο AB, BC αντιστοίχως, προς το αυτό μέρος της (ε). Το ημικύκλιο έστω (O) με διάμετρο την διάκεντρο KL, τέμνει τα ημικύκλια $(K), (L)$ στα σημεία D, E αντιστοίχως και έστω τα σημεία $F \equiv (K) \bigcap DE$ και $Z \equiv (L) \bigcap DE$. Αποδείξτε ότι η μεταβλητή ευθεία που συνδέει τα σημεία $P \equiv AF \bigcap CZ$ και $Q \equiv AD \bigcap CE$, περνάει από το μέσον του τμήματος AC.



3η ΑΠΟΔΕΙΞΗ (Σωτήρης Λουρίδας)

- Το τετράπλευρο $BEQD$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο έστω (N), λόγω $\angle BDQ = 90^O = \angle BEC$, με διάμετρο QB και N το κέντρο του, ως το μέσον του QB (προφανές).

Έστω Q', O', B', οι προβολές των Q, N, B επί της DE αντιστοίχως και ισχύει $\boxed{DQ' = B'E}$,(1)

Έστω K', L', οι προβολές των K, L αντιστοίχως, επί της ευθείας FZ και από το τραπέζιο $KLL'K'$ έχουμε $\boxed{O'K' = O'L'}$,(2) από $OK = OL$ και $KK' \parallel OO' \parallel LL'$.

Από (2) και $O'D = O'E \Rightarrow \boxed{DK' = EL'}$,(3) $\Rightarrow \boxed{(O'D)(O'F) = (O'E)(O'Z)}$,(4)

Από (4) προκύπτει ότι το μέσον O' του DE ανήκει στον ριζικό άξονα των κύκλων (K), (L) και άρα, ισχύει $\boxed{O'B \perp KL}$,(5)

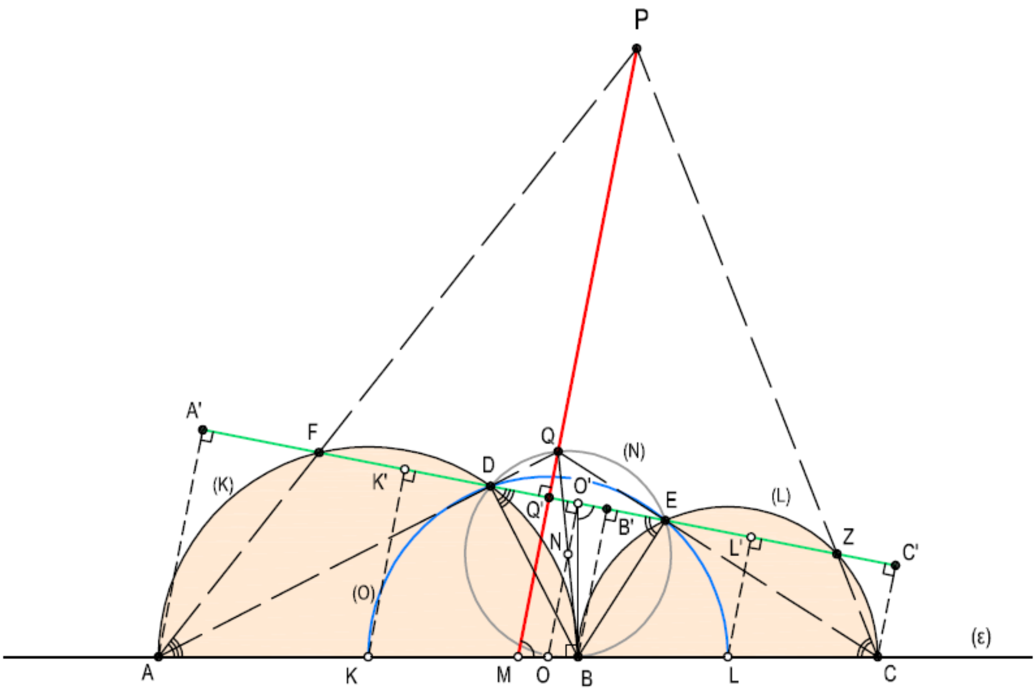
- Έστω A', C', οι προβολές των A, C αντιστοίχως επί της ευθείας FZ και από το τραπέζιο $ABB'A'$, έχουμε $K'A' = K'B'$, λόγω $KA = KB$ και $AA' \parallel KK' \parallel BB'$ και άρα έχουμε $\boxed{A'F = DB'}$,(6) λόγω $K'F = K'D$.

Ομοίως, από το τραπέζιο $BCC'B'$ έχουμε $\boxed{B'E = ZC'}$,(7)

Από (6) και $DB' = EQ'$, λόγω της (1), προκύπτει $\boxed{AF = EQ'}$,(8)

Από (1),(3),(7),(8) $\Rightarrow A'Q' = A'F + FD + DQ' = Q'E + EZ + ZC' = Q'C' \Rightarrow \boxed{A'Q' = Q'C'}$,(9)

Από (9) και $AA' \parallel QQ' \parallel CC'$ προκύπτει ότι η ευθεία $QQ' \perp DE$ περνάει από το μέσον M του AC.



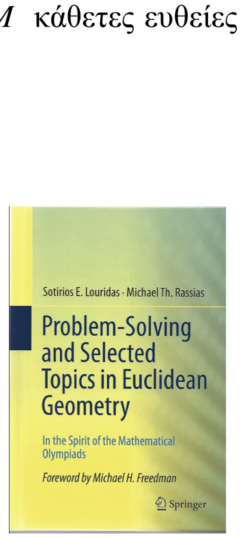
- Αρκεί τώρα, να αποδειχθεί ότι ισχύει $\boxed{PM \perp DE}$,(10)

Η (10) όμως αληθεύει από $BO' \perp AC$ και $\angle PMC = \angle BO'D$ στα όμοια τρίγωνα $\triangle PAC$, $\triangle BDE$, λόγω $\angle PAC = \angle BDE$ και $\angle PCA = \angle BED$ (στα όμοια τρίγωνα, οι ομόλογες ευθείες τους σχηματίζουν ίσες γωνίες).

Συμπεραίνεται έτσι, ότι οι ευθείες $QQ' \equiv QQ'M$ και PM, ως δια του σημείου M κάθετες ευθείες επί την DE, ταυτίζονται και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

- Η ως άνω απόδειξη είναι δημοσιευμένη και στο παραπλεύρως εμφαινόμενο βιβλίο των Σ.Ε.Λουρίδα - Μ.Θ.Ρασσιά, Εκδόσεις SPRINGER, Νέα Υόρκη, 2013 (σελίδα 166).



Έχω το προνόμιο να με τιμά με την φιλία του ο εκ των συγγραφέων Σ.Ε.Λουρίδας ο οποίος μου εκμυστηρεύτηκε ότι υπήρξαν αντιρρήσεις εκ μέρους του εκδότη, για την ονομαστική αναφορά (Proposed by Kostas Vittas, Greece), στην εκφώνηση του προβλήματος με το αιτιολογικό ότι οι ονομαστικές αναφορές είναι επιτρεπτές μόνο όταν πρόκειται για γνωστά ονόματα από την βιβλιογραφία, εν γένει.

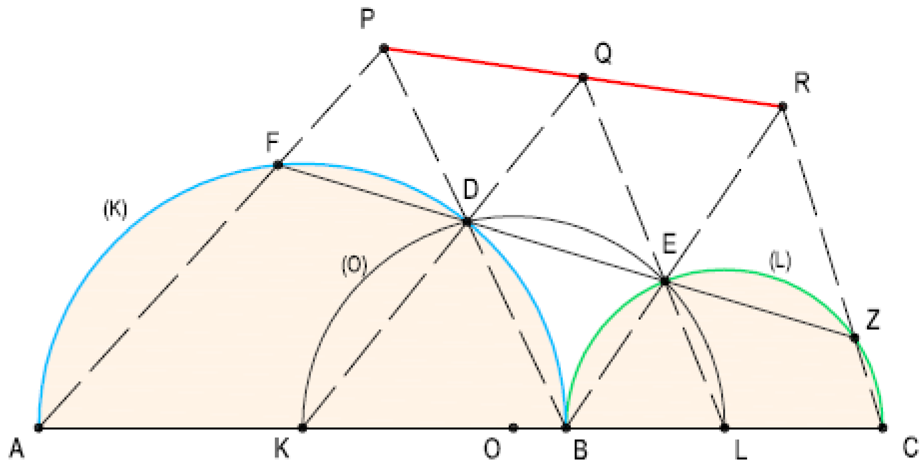
Ο Σωτήρης τότε, τους γνωστοποίησε ότι υπάρχει επώνυμο θεώρημα Γεωμετρίας που αφορά στο πρόσωπό μου (Vittas's theorem) και οι αντιρρήσεις κάμφθηκαν...

- Μία άλλη προσέγγιση από τον **Στάθη Κούτρα**, συγγενική με την προηγούμενη 3η απόδειξη, θα βρει ο αναγνώστης στο φόρουμ **mathematica.gr**.

https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=112&t=1200

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΗΜΙΚΥΚΛΙΑ - ΠΡΟΤΑΣΗ 2

Επί ευθείας (ε) δίνεται η σημειοσειρά $A, B, C,$ με το B μεταβλητό σημείο μεταξύ των A, C και έστω $(K), (L),$ τα ημικύκλια με διάμετρο AB, BC αντιστοίχως, προς το αυτό μέρος της (ε). Το ημικύκλιο έστω (O) με διάμετρο την διάκεντρο $KL,$ τέμνει τα ημικύκλια $(K), (L)$ στα σημεία D, E αντιστοίχως και έστω τα σημεία $F \equiv (K) \cap DE$ και $Z \equiv (L) \cap DE.$ Αποδείξτε ότι τα σημεία $P \equiv AF \cap BD$ και $Q \equiv KD \cap LE$ και $R \equiv BE \cap CZ,$ είναι συνευθειακά.



ΣΗΜΕΙΩΣΗ (ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2022)

Η πρόταση αυτή πρωτοδημοσιεύτηκε στο **mathematica.gr**, τον Μάϊο του 2014, χρονιά που συμπληρώνεται πενταετία συμμετοχής μου στα δρώμενα αυτού του φόρουμ.

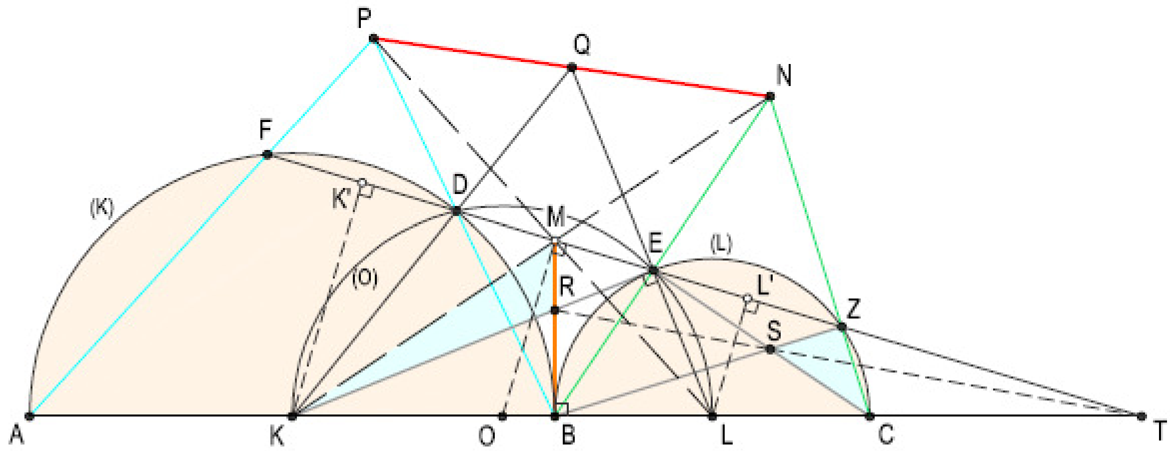
https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=112&t=44115

Η ανακάλυψή της όμως, όπως και της ΠΡΟΤΑΣΗΣ 3 που ακολουθεί στα επόμενα, έρχεται από αρκετά νωρίτερα, από την εποχή προ υπολογιστή για μένα, όταν τα σχήματα κατασκευάζονταν με το χέρι.

Στην συζήτηση που έγινε στον παραπάνω σύνδεσμο, δημοσιεύτηκαν επίσης πρόσθετα αποτελέσματα ως ξεχωριστά προβλήματα, που προτάθηκαν από τον αγαπητό μου φίλο **Στάθη Κούτρα** και υπάρχει πρόβλεψη να ολοκληρωθεί κάποια στιγμή το αρχείο με τις αποδείξεις όλων των αποτελεσμάτων που έχουν προκύψει μέχρι τώρα, από το ενδιαφέρον σχήμα που αφορά στα ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΗΜΙΚΥΚΛΙΑ.

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΗΜΙΚΥΚΛΙΑ - ΠΡΟΤΑΣΗ 2

Επί ευθείας (ε) δίνεται η σημειοσειρά $A, B, C,$ με το B μεταβλητό σημείο μεταξύ των A, C και έστω $(K), (L),$ τα ημικύκλια με διάμετρο AB, BC αντιστοίχως, προς το αυτό μέρος της (ε). Το ημικύκλιο έστω (O) με διάμετρο την διάκεντρο $KL,$ τέμνει τα ημικύκλια $(K), (L)$ στα σημεία D, E αντιστοίχως και έστω τα σημεία $F \equiv (K) \cap DE$ και $Z \equiv (L) \cap DE$. Αποδείξτε ότι τα σημεία $P \equiv AF \cap BD$ και $Q \equiv KD \cap LE$ και $R \equiv BE \cap CZ,$ είναι συνευθειακά.



1η ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω K', M, L', οι προβολές των σημείων K, O, L επί της ευθείας FZ, όπου O είναι το κέντρο του ημικυκλίου (O), ως τα μέσα των DF, DE, EZ, αντιστοίχως (προφανές).

Από το τραπέζιο $KK'L'L$ με $KO = KL$ και $KK' \parallel OM \parallel LL'$, έχουμε:

$$MK' = ML' \ \Rightarrow\ MD + DK' = ME + EL' \ \Rightarrow\ DK' = EL' \ \Rightarrow\ DF = EZ \qquad (1)$$

Από (1) και $MD = ME \ \Rightarrow\ (MD)(MF) = (ME)(MZ) \qquad (2)$

Από (2) προκύπτει ότι το μέσον M του DE (αλλά και του FZ), ανήκει στον ριζικό άξονα των κύκλων (K), (L) και άρα, ισχύει $MB \perp AC$ και έστω το σημείο $T \equiv AC \cap DE$.

- Η ευθεία KE εφάπτεται του ημικυκλίου (L), από $LE \perp KE$, λόγω της διαμέτρου KL στο ημικύκλιο (O) και άρα, η ευθεία BE ταυτίζεται με την Πολική ευθεία του σημείου έστω $R \equiv KE \cap BM$ ως προς τον κύκλο (L) και επειδή περνάει από το σημείο N, προκύπτει ότι και η ευθεία ST, που συνδέει τα σημεία $S \equiv BZ \cap CE$ και $T \equiv BC \cap EZ$, ως η Πολική ευθεία του σημείου N ως προς τον κύκλο (L), περνάει από το σημείο R.

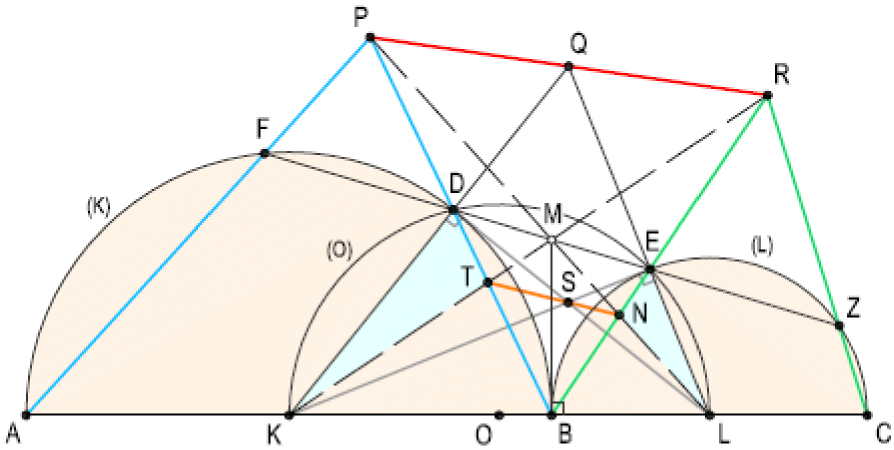
Από $KC \cap RS \cap MZ \equiv T$ τώρα, σύμφωνα με το **Θεώρημα Desargues**, έχουμε ότι τα τρίγωνα $\triangle RKM$, SCZ είναι προοπτικά και άρα, από $RM \cap SZ \equiv B$ και $RK \cap SC \equiv E$, συμπεραίνεται ότι οι ευθείες KM, CZ τέμνονται σε σημείο επί της ευθείας BE και επομένως, έχουμε ότι η ευθεία KM περνάει από το σημείο $N \equiv BE \cap CZ$.

Ομοίως, αποδεικνύεται ότι η ευθεία LM περνάει από το σημείο $P \equiv BD \cap AF$.

• Επί των ευθειών KL, DE, θεωρούμε τις τριάδες των σημείων K, B, L και E, M, D αντιστοίχως και σύμφωνα με το **Θεώρημα Πάππου**, συμπεραίνεται ότι τα σημεία $N \equiv KM \cap EB$ και $Q \equiv KD \cap EL$ και $P \equiv BD \cap ML$ είναι συνευθειακά και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΗΜΙΚΥΚΛΙΑ - ΠΡΟΤΑΣΗ 2

Επί ευθείας (ε) δίνεται η σημειοσειρά A, B, C, με το B μεταβλητό σημείο μεταξύ των A, C και έστω $(K), (L)$, τα ημικύκλια με διάμετρο AB, BC αντιστοίχως, προς το αυτό μέρος της (ε). Το ημικύκλιο έστω (O) με διάμετρο την διάκεντρο KL, τέμνει τα ημικύκλια $(K), (L)$ στα σημεία D, E αντιστοίχως και έστω τα σημεία $F \equiv (K) \cap DE$ και $Z \equiv (L) \cap DE$. Αποδείξτε ότι τα σημεία $P \equiv AF \cap BD$ και $Q \equiv KD \cap LE$ και $R \equiv BE \cap CZ$, είναι συνευθειακά.



2η ΑΠΟΔΕΙΞΗ (Στάθης Κούτρας)

• Έστω M, το σημείο τομής της ευθείας FZ από την κοινή εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων (K), (L) και από $KD \perp DL$ έχουμε ότι η ευθεία LD εφάπτεται στον κύκλο (K).

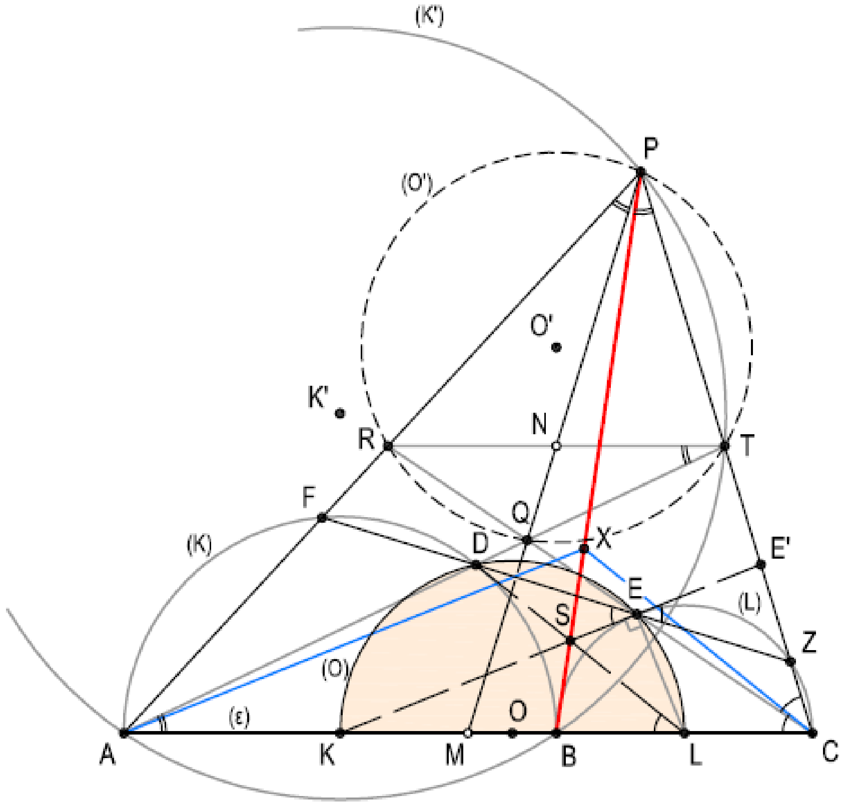
Θεωρούμε το τετράπλευρο $AFDB$, ως το εγγεγραμμένο στον κύκλο (K) εκφυλισμένο εξάγωνο $AFDDBB$ και σύμφωνα με το **Θεώρημα Pascal**, έχουμε ότι τα σημεία $P \equiv AF \cap DB$ και $M \equiv FD \cap BB$ και $L \equiv DD \cap AB$, είναι συνευθειακά.

• Επί των ευθειών AC, FZ, θεωρούμε τις τριάδες των σημείων K, B, L και D, M, E αντιστοίχως και σύμφωνα με το **Θεώρημα Πάππου**, προκύπτει ότι τα σημεία $T \equiv KM \cap DB$ και $S \equiv KE \cap DL$ και $N \equiv BE \cap ML$ είναι συνευθειακά και άρα, τα τρίγωνα $\vartriangle KTD$, $\vartriangle ENL$ είναι προοπτικά.

Από την προοπτικότητα των ως άνω τριγώνων τώρα, σύμφωνα με το **Θεώρημα Desarques**, συμπεραίνεται ότι τα σημεία $P \equiv TD \cap NL$ και $Q \equiv KD \cap EL$ και $R \equiv KT \cap EN$ ανήκουν στην ίδια ευθεία και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΗΜΙΚΥΚΛΙΑ - ΠΡΟΤΑΣΗ 3

Επί ευθείας (ε) δίνεται η σημειοσειρά $A, B, C,$ με το B μεταβλητό σημείο μεταξύ των A, C και έστω $(K), (L),$ τα ημικύκλια με διάμετρο AB, BC αντιστοίχως, προς το αυτό μέρος της (ε). Το ημικύκλιο έστω (O) με διάμετρο την διάκεντρο $KL,$ τέμνει τα ημικύκλια $(K), (L)$ στα σημεία D, E αντιστοίχως και έστω τα σημεία $F \equiv (K) \cap DE$ και $Z \equiv (L) \cap DE$. Αποδείξτε ότι τα σημεία $P \equiv AF \cap CZ$ και $S \equiv KE \cap LD$ και $B,$ είναι συνευθειακά.



1η ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Έστω τα σημεία $Q \equiv AD \cap CE$ και $R \equiv PA \cap CQ$ και $T \equiv PC \cap AQ$.

Σύμφωνα με την ΠΡΟΤΑΣΗ 1, ισχύει $RT \parallel AC$ και η ευθεία PQ περνάει από τα μέσα M, N των AC, RT, αντιστοίχως.

Έχει αποδειχθεί επίσης ότι τα τετράπλευρα $PABT$, $PRQT$ είναι εγγράψιμα και άρα, ισχύει:

$$\angle RPQ = \angle RTQ = \angle QAB = \angle BPT \qquad (1)$$

Η ευθεία PB δηλαδή, ταυτίζεται με την P-συμμετροδιάμεσο του τριγώνου $\triangle PAC$.

- Δια των σημείων A, C, φέρνουμε τις παράλληλες ευθείες προς τις KE, LD αντιστοίχως, οι οποίες τέμνονται στο σημείο έστω X.

Από $\dfrac{BK}{KA} = 1 = \dfrac{BL}{LC}$, με το **Θεώρημα Θαλή**, προκύπτει ότι τα σημεία B, S, X, είναι συνευθειακά.

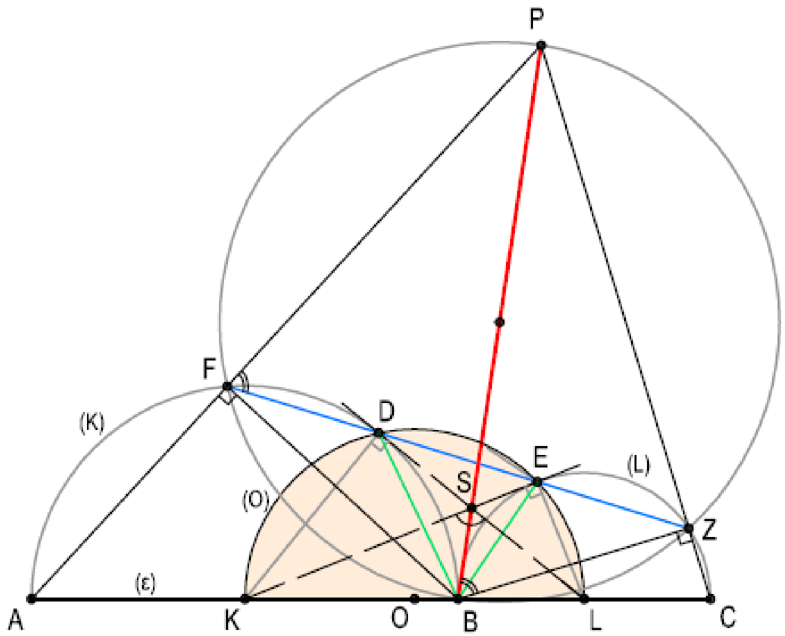
- Από $\angle KCX = \angle KLD = \angle KED = \angle E'EZ = \angle ECZ$, γιατί η ευθεία KE εφάπτεται στο ημικύκλιο (L), λόγω $\angle KEL = 90°$, συμπεραίνεται ότι οι ευθείες CE, CX είναι ισογώνιες ως προς την γωνία $\angle PCA$ και ομοίως αποδεικνύεται ότι και οι ευθείες AD, AX είναι ισογώνιες ως προς την $\angle PAC$.

Συμπεράνεται έτσι, ότι το σημείο X ανήκει στην ευθεία PB, ως το σημείο τομής δύο ευθειών των οποίων οι ισογώνιες τέμνονται επί της ευθείας PM, ισογώνιας της PB.

Οι ευθείες BSX, BXP τώρα, ταυτίζονται γιατί έχουν δύο κοινά σημεία και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΗΜΙΚΥΚΛΙΑ - ΠΡΟΤΑΣΗ 3

Επί ευθείας (ε) δίνεται η σημειοσειρά A, B, C, με το B μεταβλητό σημείο μεταξύ των A, C και έστω $(K), (L)$, τα ημικύκλια με διάμετρο AB, BC αντιστοίχως, προς το αυτό μέρος της (ε). Το ημικύκλιο έστω (O) με διάμετρο την διάκεντρο KL, τέμνει τα ημικύκλια $(K), (L)$ στα σημεία D, E αντιστοίχως και έστω τα σημεία $F \equiv (K) \cap DE$ και $Z \equiv (L) \cap DE$. Αποδείξτε ότι τα σημεία $P \equiv AF \cap CZ$ και $S \equiv KE \cap LD$ και B, είναι συνευθειακά.



2η ΑΠΟΔΕΙΞΗ (Nima Amini – ΙΡΑΝ)

- Από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα $\triangle DKS$, $\triangle ELS$, έχουμε $\dfrac{SK}{SL} = \dfrac{KD}{LE} = \dfrac{KB}{LB}$ (1)

λόγω $KD = KB$ και $LE = LB$.

$$\text{Από } (1) \Rightarrow \angle KSB = \angle LSB \quad (2)$$

Για να είναι τα σημεία B, S, P συνευθειακά, αρκεί να αποδειχθεί ότι ισχύει $\boxed{\angle ZBP = \angle ZBS}$ (3)

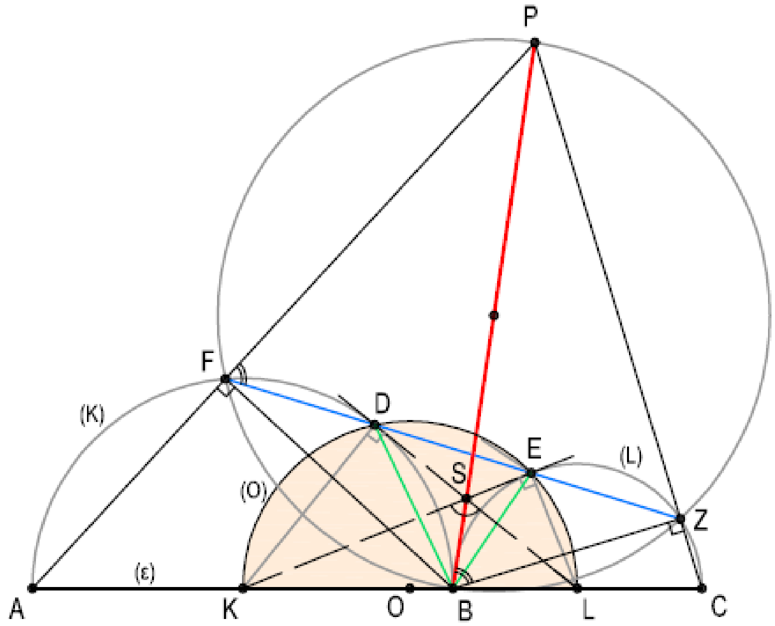
- Από το εγγράψιμο τετράπλευρο $BFPZ$ έχουμε $\boxed{\angle ZBP = \angle ZFP}$ (4)

$$\text{Ισχύει: } \angle ZBS = \angle SBC - \angle ZBC \quad (5)$$

Αλλά, $\angle SBC = \angle LKE + \angle KSB$ (6)

και $\angle ZBC = 90° - \angle BCZ = 90° - \angle BED = 90° - \angle BEK - \angle KED$ (7)

Από (7) και $\angle KED = \angle KLD$ και $\angle BEK = 45^\circ - \dfrac{\angle LKE}{2}$ λόγω της εφαπτομένης KE του ημικυκλίου (L), από το σημείο K που κείται επί της ευθείας της διαμέτρου BC, προκύπτει (αποδεικνύεται εύκολα) ότι $\angle ZBC = 45^\circ + \dfrac{\angle LKE}{2} - \angle KLD \quad (8)$



Από (5), (6), (8) $\Rightarrow \angle ZBS = \angle LKE + \angle KSB - 45^\circ - \dfrac{\angle LKE}{2} + \angle KLD$

$$\Rightarrow \angle ZBS = \frac{\angle LKE + \angle KSL}{2} - 45^\circ + \angle ABD - \angle BDL$$

$$\Rightarrow \angle ZBS = 90^\circ - \frac{\angle KLD}{2} - 45^\circ + \angle ABD - \left(45^\circ - \frac{\angle KLD}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\angle ZBS = \angle ABD = \angle ZFP} \quad (9)$$

Από (4), (9) $\Rightarrow$ (3) και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

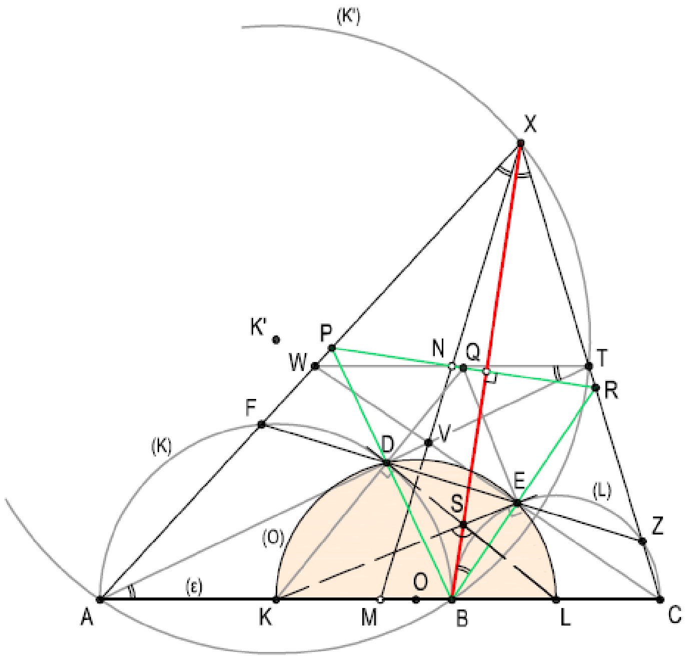
- Η ως άνω απόδειξη πρωτοδημοσιεύτηκε στο φόρουμ **AoPS**, τον Μάϊο του 2014 και έχει το προσόν ότι δεν βασίζεται σε κάποιο **Λήμμα**.

https://artofproblemsolving.com/community/c6h591170

- Ακολουθούν στα επόμενα οι αποδείξεις των πρόσθετων αποτελεσμάτων που προτάθηκαν από τον **Στάθη Κούτρα** κατά την συζήτηση που έγινε στο φόρουμ **mathematica.gr**, με τις εκφωνήσεις τους δοσμένες ως ξεχωριστές προτάσεις.

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΗΜΙΚΥΚΛΙΑ - ΠΡΟΤΑΣΗ 4 (Στάθης Κούτρας)

Επί ευθείας (ε) δίνεται η σημειοσειρά $A, B, C,$ με το B μεταβλητό σημείο μεταξύ των A, C και έστω $(K), (L),$ τα ημικύκλια με διάμετρο AB, BC αντιστοίχως, προς το αυτό μέρος της (ε). Το ημικύκλιο έστω (O) με διάμετρο την διάκεντρο $KL,$ τέμνει τα ημικύκλια $(K), (L)$ στα σημεία D, E αντιστοίχως και έστω τα σημεία $F \equiv (K) \cap DE$ και $Z \equiv (L) \cap DE.$ Αποδείξτε ότι η ευθεία των σημείων $P \equiv AF \cap BD$ και $Q \equiv KD \cap LE$ και $R \equiv BE \cap CZ$ της πρότασης 2, ταυτίζεται με την μεσοκάθετη ευθεία του τμήματος BX, όπου $X \equiv AF \cap CZ.$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχει αποδειχθεί στα προηγούμενα (ΠΡΟΤΑΣΗ 3), ότι το σημείο $S \equiv KE \cap LD$ ανήκει στην ευθεία BX και ότι $\angle KSB = \angle LSB.$

Για να είναι η ευθεία PQR μεσοκάθετη του τμήματος BX, αρκεί να αποδειχθεί ότι ισχύει $PB = PX$ και $RB = RX$.

- Από το τρίγωνο $\triangle SBE$ έχουμε $\angle XBR = \angle KSB - \angle KEB$ (1)

Αλλά, $\angle KSB = \dfrac{\angle KSL}{2} = 90° - \dfrac{\angle KLS + \angle LKS}{2}$ (2) και $\angle KEB = 45° - \dfrac{\angle LKS}{2}$ (3) (*)

Από (1), (2), (3) $\Rightarrow$ $\angle XBR = 45° - \dfrac{\angle KLS}{2} = \dfrac{90° - \angle KLS}{2} = \dfrac{\angle LKD}{2} = \angle BAD$ (4)

Από (4) και $\angle BAD \equiv \angle BAT = \angle BXT \equiv \angle BXR$ λόγω του εγγραψίμου τετραπλεύρου $XABT$, προκύπτει ότι $\angle XBR = \angle BXR \Rightarrow RB = RX$ (5) και ομοίως αποδεικνύεται $PB = PX$ (6)

Από (5), (6) συμπεραίνεται ότι η ευθεία PQR ταυτίζεται με την μεσοκάθετη του τμήματος BX και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

(*) $\angle KEB = \angle BCE = 90° - \angle CBE = 90° - (\angle KEB + \angle LKS) \Rightarrow$ (3)

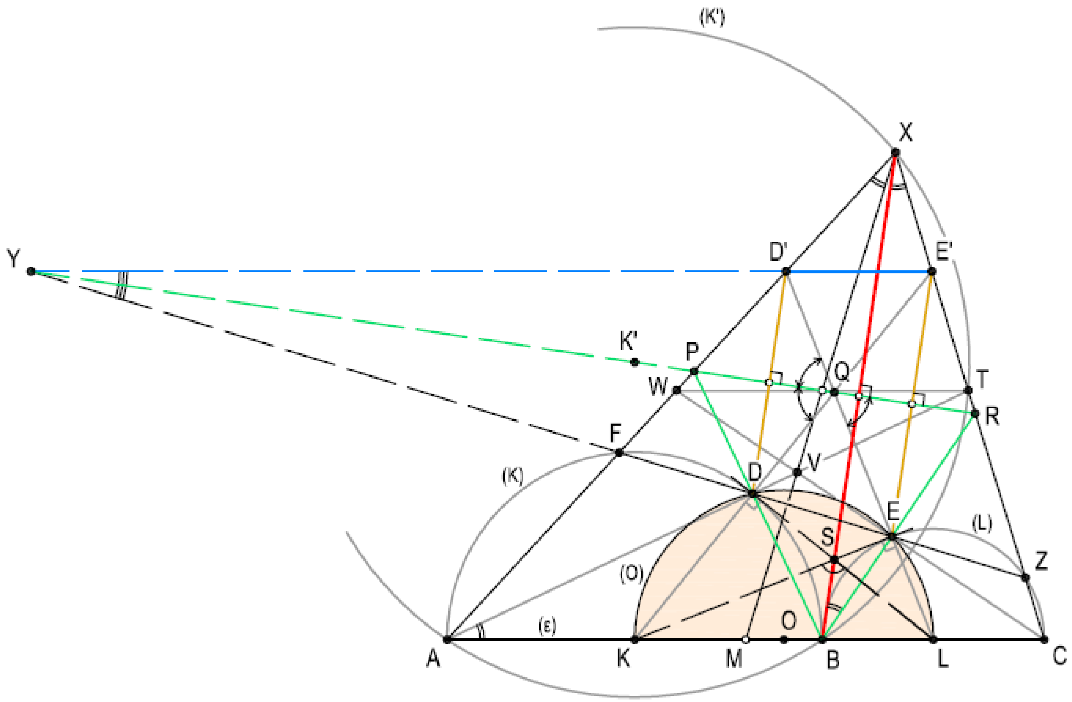
ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΗΜΙΚΥΚΛΙΑ - ΠΡΟΤΑΣΗ 5 (Στάθης Κούτρας)

Επί ευθείας (ε) δίνεται η σημειοσειρά $A,B,C,$ με το B μεταβλητό σημείο μεταξύ των A,C και έστω $(K),(L),$ τα ημικύκλια με διάμετρο AB,BC αντιστοίχως, προς το αυτό μέρος της (ε). Το ημικύκλιο έστω (O) με διάμετρο την διάκεντρο $KL,$ τέμνει τα ημικύκλια $(K),(L)$ στα σημεία D,E αντιστοίχως και έστω τα σημεία $F\equiv(K)\cap DE$ και $Z\equiv(L)\cap DE.$ Αποδείξτε ότι:

α) Η ευθεία των σημείων $P\equiv AF\cap BD$ και $Q\equiv KD\cap LE$ και $R\equiv BE\cap CZ$ της πρότασης 2, συντρέχει με τις ευθείες $FZ,\ D'E',$ όπου $D'\equiv XA\cap LQ$ και $E'\equiv XC\cap KQ$ και $X\equiv AF\cap CZ.$

β) Η ευθεία $D'E'$ είναι παράλληλη προς την ευθεία $AC.$

γ) Η ευθεία YPR διχοτομεί την γωνία $\angle FYD',$ όπου $Y\equiv FZ\cap PR\cap D'E'.$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Από το τρίγωνο $\triangle EQR$ έχουμε $\angle EQR=180^\circ-\angle QER-\angle QRE$ (1)

Αλλά, $\angle QER=\angle BEL=\angle EBC$ (2) και $\angle QRE=\angle QRX=90^\circ-\angle BXT=90^\circ-\angle BAD$ (3)

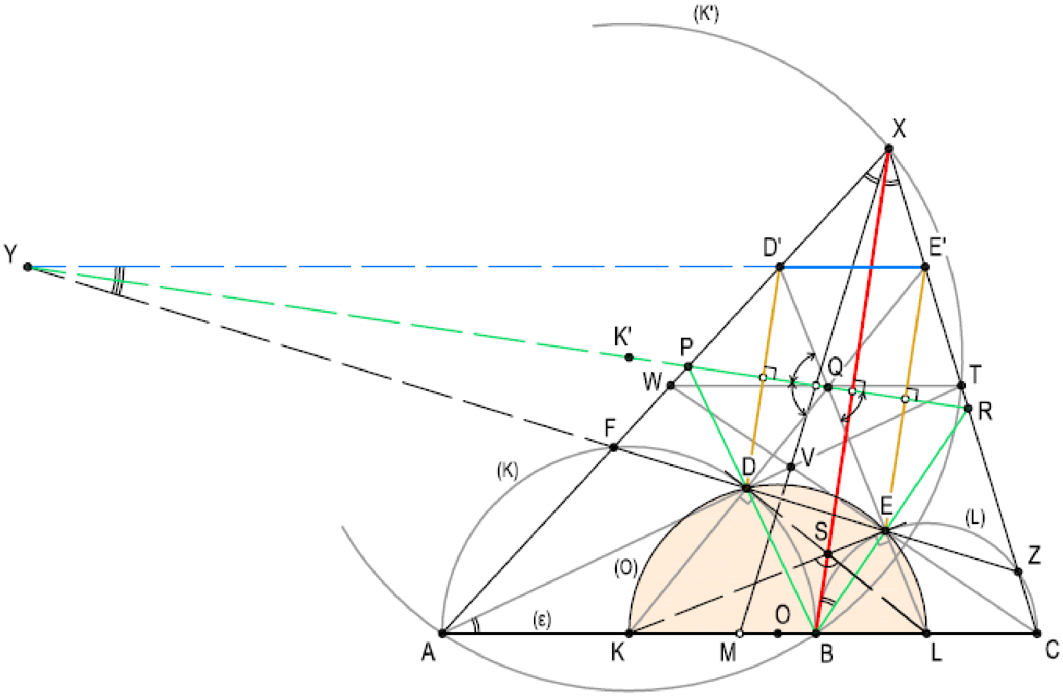
Από (1), (2), (3) $\Rightarrow$ $\angle EQR=90^\circ+\angle BAD-\angle EBC$ (4)

Ομοίως, αποδεικνύεται ότι ισχύει και $\angle DQP=90^\circ+\angle BCE-\angle DBA$ (5)

Από (4), (5) και $\angle BAD+\angle DBA=90^\circ=\angle BCE+\angle EBC$ $\Rightarrow$ $\boxed{\angle DQP=\angle EQR=\angle D'QP}$ (6)

Από (6) και $\angle DPQ=\angle D'PQ$ προκύπτει ότι η ευθεία PQR ταυτίζεται με την μεσοκάθετη του DD' και άρα, ισχύει $\boxed{DD'\parallel XB}$ (7) και ομοίως έχουμε $\boxed{EE'\parallel XB}$ (8)

- Από τα συνευθειακά σγμεία τώρα, $B \equiv PD \cap RE$ και $X \equiv PD' \cap RE'$ και $\infty \equiv DD' \cap EE'$, σύμφωνα με το **Θεώρημα Desarques**, συμπεραίνεται ότι τα τρίγωνα $\triangle PDD'$, $\triangle REE'$ είναι προοπτικά και επομένως, οι ευθείες $DE \equiv FZ$ και $PR \equiv PQR$ και $D'E'$, τέμνονται στο ίδιο σημείο έστω Y και το **(α)** ζητούμενο έχει αποδειχθεί.



- Για να είναι $D'E' \parallel AC$, αρκεί να αποδειχθεί ότι ισχύει $\dfrac{QD'}{QL} = \dfrac{QE'}{QK}$ (9)

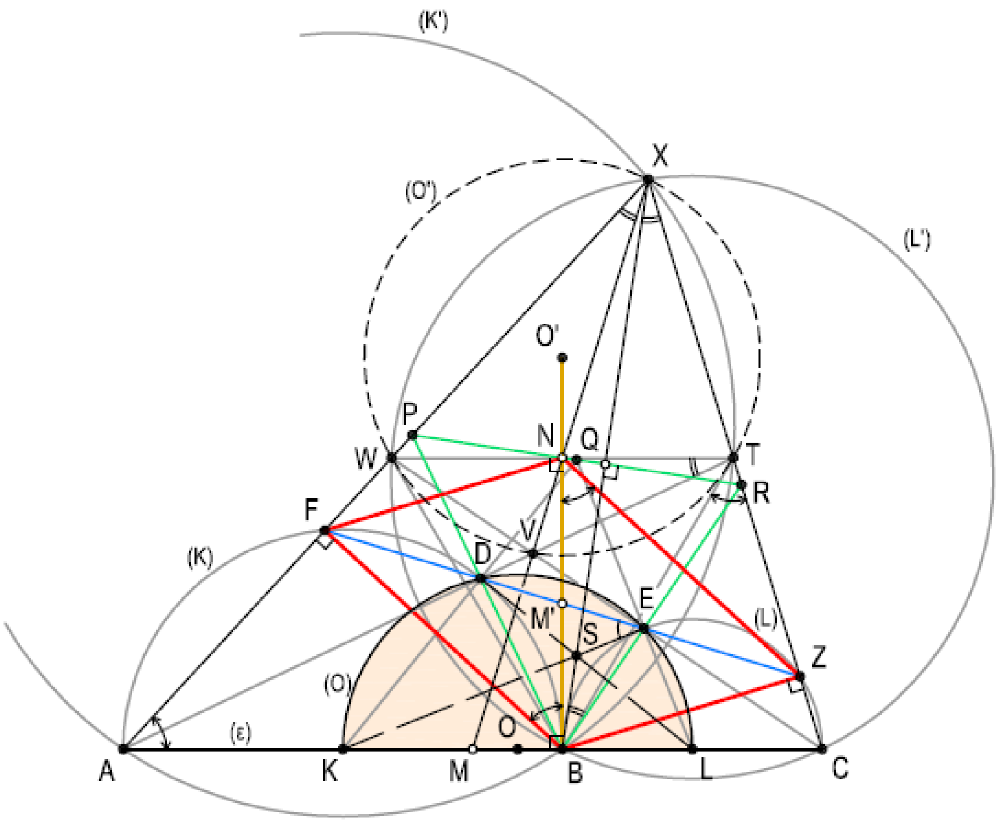
Από (9) αρκεί να αποδειχθεί $\dfrac{QD}{QL} = \dfrac{QE}{QK}$ (10) λόγω $QD = QD'$ και $QE = QE'$.

Η (10) όμως αληθεύει από τα όμοια τρίγωνα $\triangle QDE$, $\triangle QLK$, λόγω του εγγραψίμου τετραπλεύρου $KDEL$ και το **(β)** ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

- Το **(γ)** ζητουμενο προκύπτει άμεσα από τα προηγούμενα, γιατί το τρίγωνο $\triangle YDD'$ είναι ισοσκελές, αφού η ευθεία YP ταυτίζεται με την μεσοκάθετη της πλευράς του DD'.

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΗΜΙΚΥΚΛΙΑ - ΠΡΟΤΑΣΗ 6 (Στάθης Κούτρας)

Επί ευθείας (ε) δίνεται η σημειοσειρά $A, B, C,$ με το B μεταβλητό σημείο μεταξύ των A, C και έστω $(K), (L),$ τα ημικύκλια με διάμετρο AB, BC αντιστοίχως, προς το αυτό μέρος της (ε). Το ημικύκλιο έστω (O) με διάμετρο την διάκεντρο $KL,$ τέμνει τα ημικύκλια $(K), (L)$ στα σημεία D, E αντιστοίχως και έστω τα σημεία $F \equiv (K) \cap DE$ και $Z \equiv (L) \cap DE.$ Αποδείξτε ότι το συμμετρικό σημείο του B ως προς το μέσον M' του τμήματος $DE,$ ανήκει στην ευθεία $PQR,$ όπου $P \equiv AF \cap BD$ και $Q \equiv KD \cap LE$ και $R \equiv BE \cap CZ.$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Έστω $N,$ το μέσον του $WT,$ όπου $W \equiv XA \cap CE$ και $T \equiv XC \cap AD$ και $X \equiv AF \cap CZ.$

Έχει αποδειχθεί στα προηγούμενα (ΠΡΟΤΑΣΗ 1) ότι ισχύει $WT \parallel AC$ και ότι το τετράπλευρο $XWVT,$ όπου $V \equiv AT \cap CW,$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο έστω $(O').$

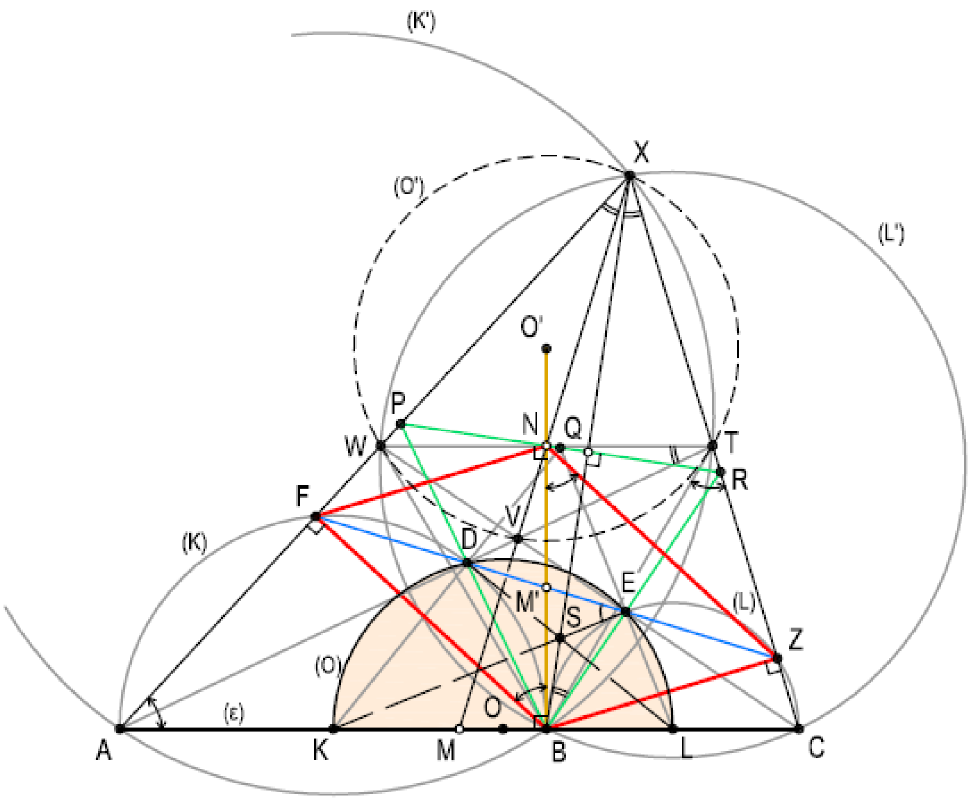
Τα σημεία $O',\ N,\ B$ είναι συνευθειακά, όπου O' είναι το κέντρο του κύκλου $(O),$ γιατί στο εγγράψιμο τετράπλευρο $XWVT,$ λόγω της AC ως της Πολικής ευθείας του σημείου $N \equiv WT \cap XV$ ως προς τον κύκλο $(O'),$ ισχύει ως γνωστό ότι $O'N \perp AC$ και ότι η ευθεία $O'N$ τέμνει την AC κατά το **Σημείο Miquel**, στο πλήρες τετράπλευρο $XWVT.AC,$ το οποίο ταυτίζεται με το σημείο $B.$

- Από την εφαπτομένη NB του κύκλου (L) και το εγγράψιμο τετράπλευρο $XWBC$ εχουμε:

$$\angle NBR = \angle BCW = \angle BXW \qquad (1)$$

Από (1) και $\angle BXW = \angle NXR$, λόγω των ισογωνίων ευθειών XM, XB ως προς την γωνία $\angle AXC$, προκύπτει $\angle NBR = \angle NXR$ (2)

Από (2) και $\angle BXR = \angle XBR$, όπως έχει αποδειχθεί στα προηγούμενα, έχουμε $\angle NBX = \angle NXB$ και άρα, το σημείο N ως το μέσον του WT, ανήκει στην ευθεία PQR, ως την μεσοκάθετη του XB.



- Από το εγγράψιμο τετράπλευρο $BNTZ$ τώρα, έχουμε: $\angle BNZ = \angle BTZ$ (3)

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο $XTBA$ έχουμε: $\angle BTZ = \angle BAX$ (4)

Λόγω της εφαπτομένης NB του κύκλου (K), ισχύει: $\angle BAX = \angle NBF$ (5)

Από (3), (4), (5) $\Rightarrow$ $\angle BNZ = \angle NBF$ $\Rightarrow$ $NZ \parallel BF$ (6) και ομοίως έχουμε $NF \parallel BZ$ (7)

Από (6), (7) έχουμε ότι το τετράπλευρο $BZNF$ είναι παραλληλόγραμμο και συμπεραίνεται έτσι, ότι το μέσο N του τμήματος WF, ταυτίζεται με το συμμετρικό σημείο του B, ως προς το μέσο έστω M' του FZ, το οποίο ταυτίζεται με το μέσο του DE και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Μία ακόμη πρόταση που αφορά στα ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΗΜΙΚΥΚΛΙΑ και οφείλεται επίσης στον **Στάθη Κούτρα**, θα συμπεριληφθεί αργότερα στο παρόν άρθρο.

Υπάρχει δημοσιευμένη στο φόρουμ **mathematica.gr** από τον Μάϊο του 2014, με την απόδειξη του ταλαντούχου νέου Μαθηματικού **Γρηγόρη Κακλαμάνου**, που ζει και δημιουργεί στην Θεσσαλονίκη.

https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=112&t=44514