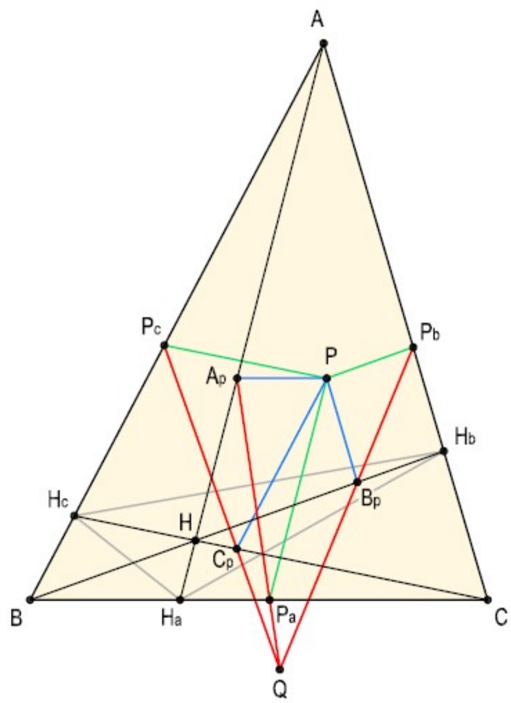
ΠΑΡΑΣΕΒΙΑΝΟ ΚΕΝΤΡΟ ΠΡΟΟΠΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Δίνεται τρίγωνο ΔABC και έστω $P, H,$ δύο τυχόντα σημεία στο εσωτερικό του και έστω $H_aH_bH_c,$ το σεβιανό τρίγωνο του H. Οι δια του σημείου P παράλληλες ευθείες προς τις $AH, BH, CH,$ τέμνουν τις πλευρές $BC, AC, AB,$ στα σημεία έστω $P_a, P_b, P_c,$ αντιστοίχως. Οι δια του σημείου P παράλληλες ευθείες προς τις $BC, AC, AB,$ τέμνουν τις ευθείες $AH, BH, CH,$ στα σημεία έστω $A_p, B_p, C_p,$ αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι οι ευθείες $A_pP_a, B_pP_b, C_pP_c,$ τέμνονται στο ίδιο σημείο.



• Το σημείο έστω $Q,$ στο οποίο συντρέχουν οι ευθείες $A_pP_a, B_pP_b, C_pP_c,$ ονομάζεται **Παρασεβιανό κέντρο προοπτικότητας** των σημείων $H, P,$ ως προς το δοσμένο τρίγωνο $\triangle ABC$.

• Η πρόταση αυτή έχει πρωτοεμφανιστεί στο φόρουμ **Hyacinthos** το 2004 προτεινόμενη ως εικασία, από τον **Eric Daneels** (**parasevian perspector**?).

http://groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/10135

Η πρώτη συνθετική απόδειξη δόθηκε από τον **Darij Grinberg**, δυνατό γεωμέτρη από την Γερμανία και πολυολυμπιονίκη μαθητή (τότε), ο οποίος την δημοσίευσε στην ιστοσελίδα του την ίδια χρονιά.

http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/ParacevaPDF.zip (**On the paracevian perspector**).

Δεν ήταν χρονιά διαδικτύου για μένα το 2004, όσον αφορά την δραστηριοποίησή μου στην Γεωμετρία, η οποία ξεκίνησε το 1995 αλλά χρειάστηκε χρόνος μιας πενταετίας περίπου, για να επανέλθω ως ερασιτέχνης σε ένα αξιοπρεπές επίπεδο, ως λύτης γεωμετρικών προβλημάτων.

Είναι η χρονιά που έστειλα την πρώτη μου εργασία στο περιοδικό **ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ** του παραρτήματος Ημαθίας της ΕΜΕ στην Βέροια (Φεβρουάριος 2004) και ήδη έχω αρχίσει να χρησιμοποιώ σχεδιαστικό πρόγραμμα υπολογιστή για τα σχήματα, το ίδιο που χρησιμοποιώ και για τα αρχιτεκτονικά σχέδια.

Είχε τύχει όμως, να ασχοληθώ με το πρόβλημα αυτό σε προγενέστερο χρόνο, όταν για τα σχήματα αλλά και για τα αρχιτεκτονικά σχέδια, χρησιμοποιούσα ακόμα απλά σχεδιαστικά όργανα (εποχή προ Υπολογιστή για μένα), χωρίς επαφή με το διαδίκτυο και δημοσιεύσεις στην αλλοδαπή.

- Δύο χρόνια αργότερα (Φεβρουάριος 2006) αρχίζει η διαδικτυακή συμμετοχή μου σε γεωμετρικά δρώμενα, με την πρώτη μου δημοσίευση στο φόρουμ **Hyacinthos** του **Αντρέα χατζηπολάκη** και το καλοκαίρι της ίδιας χρονιάς εμφανίζεται ξανά το ίδιο πρόβλημα, προτεινόμενο από τον **Quang Tuan Bui** από το Βιετνάμ, που αφορούσε όμως στην ειδική περίπτωση, με το σημείο H ως το ορθόκεντρο του δοσμένου τριγώνου $\triangle ABC$.

http://groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/13907

Στην εκτεταμένη συζήτηση που έγινε τότε, περιλαμβάνεται και η απόδειξη που είχα υπόψη μου (**1η απόδειξη** στα επόμενα), γίνεται νύξη για μία απλούστερη συνθετική προσέγγιση (**2η απόδειξη** στα επόμενα) και διαπιστώνω με έκπληξη ότι το πρόβλημα που θεωρούσα ως προσωπική κατασκευή, έχει ξανασυζητηθεί δύο χρόνια νωρίτερα στο ίδιο φόρουμ, όπου μάλιστα είχε ήδη προσδιοριστεί από τον **Bernard Gibert**, ότι το σημείο Q στο οποίο συντρέχουν οι ευθείες $A_pP_a, B_pP_b, C_pP_c,$ ταυτίζεται με το μέσον του τμήματος $PR,$ όπου R είναι το $H-Ceva$ συζυγές σημείο του $P,$ ως προς το $\triangle ABC.$

- Στο τέλος της ίδια χρονιάς (2006) το πρόβλημα αυτό συζητήθηκε και στο φόρουμ **AoPS**.

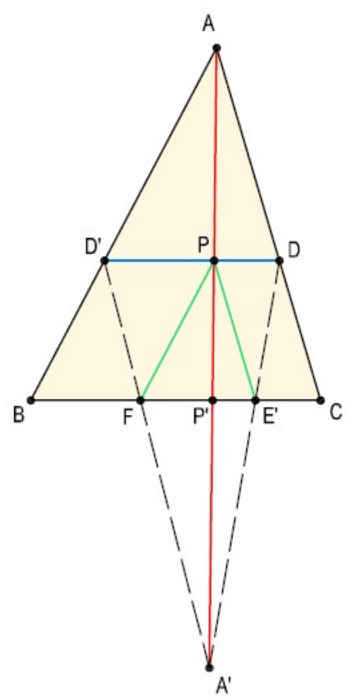
https://artofproblemsolving.com/community/c6h126138

- Καλοκαίρι του 2011, η τελευταία διαδικτυακή εμφάνιση του προβλήματος στο φόρουμ **mathematica.gr**.

https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=112&t=18446

- Θα αποδείξουμε πρώτα την ακόλουθη **Βοηθητική πρόταση**:

ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ. Δίνεται τρίγωνο $\triangle ABC$ και έστω $P,$ τυχόν σημείο στο εσωτερικό του. Φέρνουμε την παράλληλη ευθεία προς την BC δια του σημείου $P,$ η οποία τέμνει τις πλευρές $AC, AB,$ στα σημεία $D, D',$ αντιστοίχως. Έστω επίσης $E', F,$ τα σημεία τομής της $BC,$ από τις παράλληλες ευθείες δια του σημείου $P,$ προς τις $AC, AB,$ αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι οι ευθείες $DE', D'F, AP,$ συντρέχουν.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

Έστω τα σημεία $A' \equiv DE' \cap D'F$ και $P' \equiv BC \cap AP.$

Από $DD' \parallel BC,$ σύμφωνα με το **Θεώρημα Θαλή**, έχουμε:

$$\frac{PD}{P'C} = \frac{AP}{AP'} = \frac{PD'}{P'B} \qquad (1)$$

Από $(1) \Rightarrow \dfrac{PD}{P'C - PD} = \dfrac{PD'}{P'B - PD'} \Rightarrow \dfrac{PD}{P'E'} = \dfrac{PD'}{P'F} \quad (2)$

γιατί ισχύει $PD = E'C$ και $PD' = FB.$

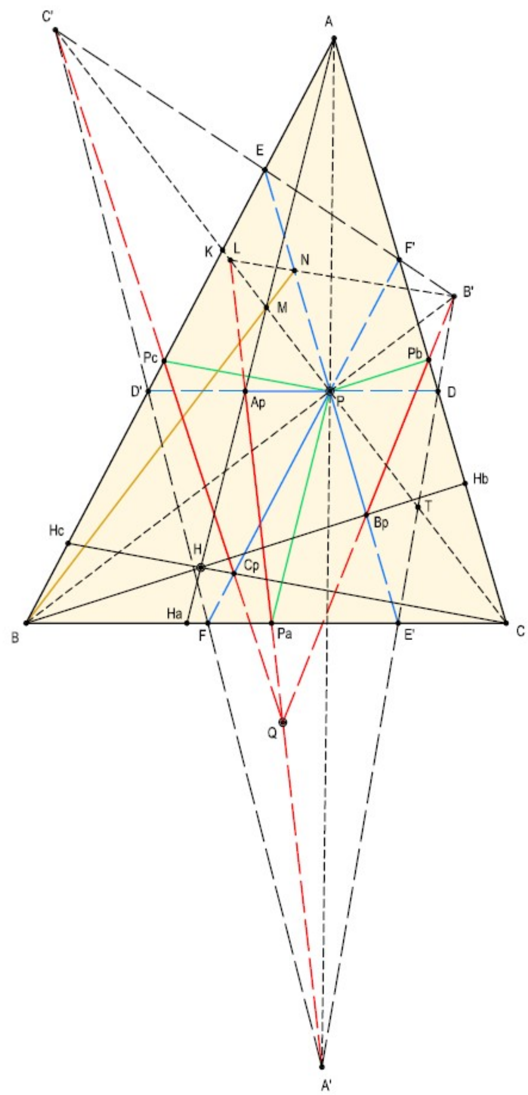
$$\text{Από } (2) \Rightarrow \frac{PD}{PD'} = \frac{P'E'}{P'F} \qquad (3)$$

Από (3), σύμφωνα με το **Θεώρημα Θαλή**, συμπεραίνεται ότι τα σημεία P, P', A' είναι συνευθειακά και η **Βοηθητική πρόταση** έχει αποδειχθεί, αφού οι ευθείες $APP', PP'A'$ με δύο κοινά σημεία ταυτίζονται.

ΠΑΡΑΣΕΒΙΑΝΟ ΚΕΝΤΡΟ ΠΡΟΟΠΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Δίνεται τρίγωνο $\triangle ABC$ και έστω $P, H,$ δύο τυχόντα σημεία στο εσωτερικό του και έστω $H_aH_bH_c$, το σεβιανό τρίγωνο του H. Οι δια του σημείου P παράλληλες ευθείες προς τις $AH, BH, CH,$ τέμνουν τις πλευρές $BC, AC, AB,$ στα σημεία έστω $P_a, P_b, P_c,$ αντιστοίχως. Οι δια του σημείου P παράλληλες ευθείες προς τις $BC, AC, AB,$ τέμνουν τις ευθείες $AH, BH, CH,$ στα σημεία έστω $A_p, B_p, C_p,$ αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι οι ευθείες $A_pP_a, B_pP_b, C_pP_c,$ τέμνονται στο ίδιο σημείο έστω $Q,$ το οποίο ταυτίζεται με το μέσον του τμήματος $PR,$ όπου R είναι το $H - Ceva$ συζυγές του $P,$ ως προς το δοσμένο τρίγωνο $\triangle ABC.$

1η ΑΠΟΔΕΙΞΗ.



• Ορίζουμε τα σημεία τομής των πλευρών του $\triangle ABC$, από τις ευθείες $PA_p, PB_p, PC_p,$ ως ακολούθως:

Ως $D, D',$ τα σημεία τομής των AC, AB από την PA_p.

Ως $E, E',$ τα σημεία τομής των AB, BC από την PB_p.

Ως F, F' τα σημεία τομής των BC, AC από την PC_p.

Ορίζουμε επίσης τα σημεία $A' \equiv DE' \bigcap D'F$ και $B' \equiv DE' \bigcap EF'$ και $C' \equiv EF' \bigcap D'F$.

• Σύμφωνα με την παραπάνω **Βοηθητική πρόταση**, στο τρίγωνο $\triangle ABC,$ με το σημείο P στο εσωτερικό του, έχουμε ότι η ευθεία AP περνάει από το σημείο A' και ομοίως, οι ευθείες BP, CP από τα σημεία $B', C',$ αντιστοίχως.

Ομοίως, στο τρίγωνο $\triangle AH_aC$ με το σημείο P στο εσωτερικό του, προκύπτει ότι οι ευθείες $A_pP_a, AP, DE',$ τέμνονται στο ίδιο σημείο.

Η ευθεία A_pP_a δηλαδή, περνάει από το σημείο A' και ομοίως, οι ευθείες $B_pP_b, C_pP_c,$ περνάνε από τα σημεία $B', C',$ αντιστοίχως.

• Έστω τα σημεία $K \equiv AB \bigcap CC'$ και $L \equiv CC' \bigcap A'A_p$ και $M \equiv AH_a \bigcap CC'$ και $N \equiv EE' \bigcap B'L.$

Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία $B, M, N,$ είναι συνευθειακά.

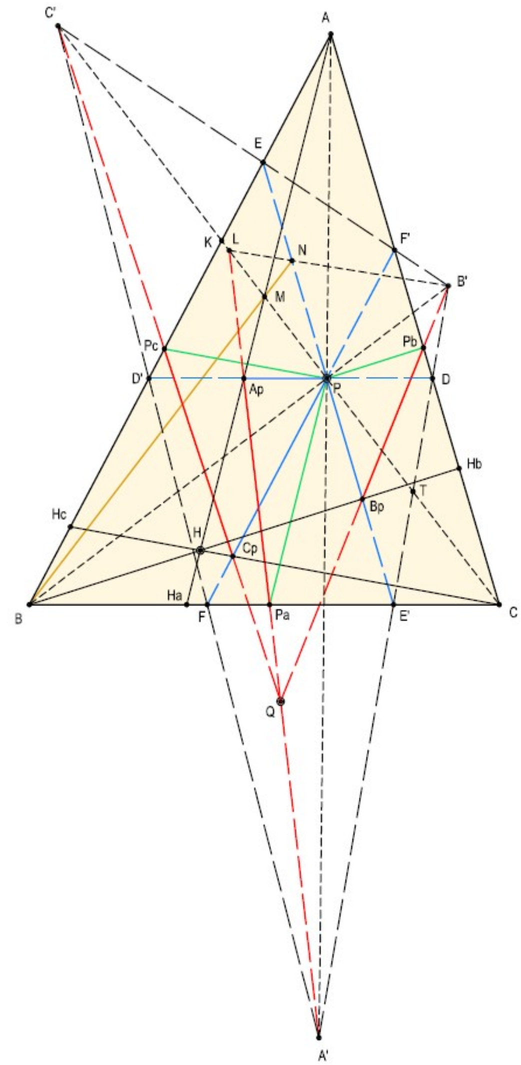
Θεωρούμε τις δέσμες $B'.C'LPT, A'.C'LPT,$ όπου $T \equiv CC' \bigcap A'B'$ και έχουμε $(B'.C'LPT) = (A'.C'LPT)$ (4) (οι **Διπλοί λόγοι** των δεσμών είναι ίσοι).

Αλλά, $(B'.C'LPT) = (E, N, P, E')$ (5) και $(A'.C'LPT) = (D', A_p, P, D)$ (6)

Από $(4),(5),(6) \Rightarrow (E,N,P,E') = (D',A_p,P,D)$ (7)

Οι ευθείες CC',DD' τέμνουν την δέσμη $A.BH_aPC$ και άρα, έχουμε $(D',A_p,P,D) = (K,M,P,C)$ (8)
Από $(7),(8) \Rightarrow (E,N,P,E') = (K,M,P,C)$ (9)

Από (9) συμπεραίνεται ότι οι ευθείες $KE, MN, E'C$, τέμνονται στο ίδιο σημείο και άρα, τα σημεία B,M,N, είναι συνευθειακά.



- Έστω το σημείο $Q \equiv B_pP_b \bigcap C_pP_c$ και αρκεί να αποδειχθεί ότι ανήκει στην ευθεία $A'L \equiv A_pP_a$.

Θεωρούμε τις δέσμες $B'.C'LB_pA', C'.B'LC_pA'$ και αρκεί να αποδειχθεί ότι έχουν ίσους **Διπλούς λόγους**.
Αρκεί δηλαδή να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$(B'.C'LB_pA') = (C'.B'LC_pA') \quad (10)$$

Αλλά, $(B'.C'LB_pA') = (E,N,B_p,E')$ (11)

και $(C'.B'LC_pA') = (F',P,C_p,F)$ (12)

Από $(10),(11),(12)$, αρκεί να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$(E,N,B_p,E') = (F',P,C_p,F) \quad (13)$$

Η (13) όμως αληθεύει, γιατί οι δέσμες $B.ENB_pE'$ και $C.F'PC_pF$, έχουν την $BE' \equiv CF$ ως κοινή ακτίνα τους και τα σημεία $A \equiv BE \bigcap CF'$ και $M \equiv BN \bigcap CP$ και $H \equiv BB_p \bigcap CC_p$, ως τα σημεία τομής των ομολόγων ακτίνων τους, συνευθειακά.

Ισχύει δηλαδή $(B.ENB_pE') = (C.F'PC_pF)$ από όπου προκύπτει η (13).

Συμπεραίνεται έτσι, ότι αληθεύει επίσης η (10) και επομένως, το ζητούμενο ότι οι ευθείες A_pP_a, B_pP_b, C_pP_c, τέμνονται στο ίδιο σημείο έχει αποδειχθεί.

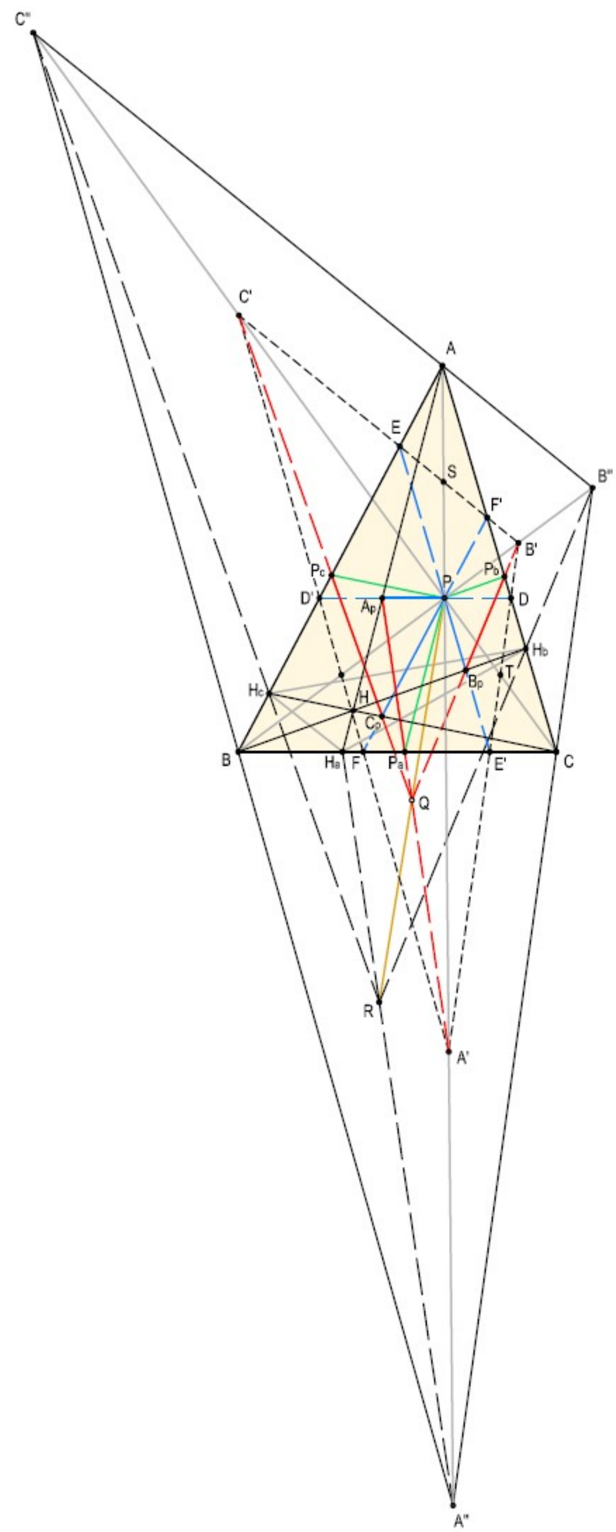
- Θα αποδείξουμε τώρα, ότι το σημείο $Q \equiv A_pP_a \cap B_pP_b \cap C_pP_c$ ταυτίζεται με το μέσον του τμήματος PR, όπου R είναι το $H-Ceva$ συζυγές σημείο του P, ως προς $\vartriangle ABC$.

Έστω το σημείο $S \equiv AA' \cap B'C'$ και από το παραλληλόγραμμο $AEPF'$ έχουμε $PS = SA$ και άρα, η δια του σημείου A παράλληλη ευθεία προς την $B'C'$, τέμνει την ευθεία PB' στο σημείο έστω B'' και ισχύει $PB' = B'B''$, σύμφωνα με το **Θεώρημα Θαλή**.

Ομοίως, λόγω του παραλληλογράμμου $CDPE'$, προκύπτει ότι και η δια του σημείου C παράλληλη ευθεία προς την $A'B'$, τέμνει την PB' στο ίδιο σημείο B''.

Δηλαδή, οι δια των κορυφών A, B, C του $\vartriangle ABC$, παράλληλες ευθείες προς τις $B'C', A'C', A'B'$ αντιστοίχως (πλευρές του $\vartriangle A'B'C'$), ορίζουν το τρίγωνο $\vartriangle A''B''C''$ με τις κορυφές του A'', B'', C'', επί των ευθειών AA', BB', CC' αντιστοίχως και ισχύουν $PA' = A'A''$, $PB' = B'B''$, $PC' = C'C''$.

Το δοσμένο τρίγωνο $\vartriangle ABC$, όπως πλέον έχει διαμορφωθεί το σχήμα μας, είναι το **Σεβιανό τρίγωνο** του σημείου P, ως προς το τρίγωνο $\vartriangle A''B''C''$, γνωστό ως το **Αντισεβιανό τρίγωνο** του $\vartriangle ABC$, ως προς το σημείο P.



- Θα αποδείξουμε τώρα, ότι $B''H_b \parallel B_pP_b$.

Από $PP_b \parallel BB_p \;\Rightarrow\; \dfrac{PP_b}{BB_p} = \dfrac{B'P}{B'B}$ (14)

Από (14) $\;\Rightarrow\; \dfrac{B'B''}{B'B} = \dfrac{B_pH_b}{BB_p}$ (15)

γιατί ισχύουν $B'P = B'B''$ και $PP_b = B_pH_b$.

Από (15), σύμφωνα με το **Θεώρημα Θαλή**, έχουμε $B''H_b \parallel B'B_p$ και άρα, συμπεραίνεται ότι η ευθεία $B''H_b$, τέμνει την ευθεία PQ στο σημείο έστω R και ισχύει $PQ = QR$, από $PB' = B'B''$.

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και οι ευθείες $A''H_a, C''H_c$, περνάνε επίσης από το σημείο R.

Το σημείο R όμως είναι σταθερό, σύμφωνα με το **Cevian Nests Theorem**, αφού ισχύει

$A''A \cap B''B \cap C''C \equiv P$ και
$AH_a \cap BH_b \cap CH_c \equiv H$.

Έτσι, το σημείο Q στο οποίο συντρέχουν οι ευθείες $A_pP_a, B_pP_b, C_pP_c,$ ταυτίζεται με το μέσον του τμήματος $PR,$ όπου R είναι (όπως παραπάνω έχει λεχθεί) το $H - Ceva$ συζυγές σημείο του $P,$ ως προς $\triangle ABC$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

- Η απόδειξη αυτή είναι αφιερωμένη σε ένδειξη τιμής, στον **Μπάμπη Στεργίου**.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ.

(1) – Το γνωστό ως **Cevian Nests Theorem** (δεν γνωρίζω την απόδοσή του στα ελληνικά), έχει συζητηθεί παλιότερα στο φόρουμ **AoPS**. https://artofproblemsolving.com/community/c6h6579

(2) – Ο **Μπάμπης Στεργίου** ζει και δημιουργεί στη Χαλκίδα, είναι καθηγητής μαθηματικών στη μέση εκπαίδευση και γνωστός πολυγραφότατος συγγραφέας βιβλίων, που σχετίζονται με τα σχολικά μαθηματικά αλλά και βιβλίων σχετικών με τους εγχώριους και διεθνείς διαγωνισμούς μαθηματικών.

(3) – Η παραπάνω απόδειξη με ταλαιπώρησε αρκετά μέχρι να καταφέρω να συνδυάσω αποτελεσματικά, τα όχι και λίγα επιχειρήματα που ήταν απαραίτητα, βασισμένα στη **Θεωρία περί Διπλού λόγου.** Από την συζήτηση όμως στο φόρουμ **Hyacinthos**, προέκυψε η απόδειξη που ακολουθεί στα επόμενα (**2η Απόδειξη**), η οποία είναι απλούστερη γιατί τεκμηριώνεται με στοιχειώδη μέσα.

(4) – Υπάρχει μία ακόμα απόδειξη που οφείλεται στον **Jean-Louis Ayme**, δημοσιευμένη στην ιστοσελίδα του. http://perso.orange.fr/jl.ayme vol. 4 the paracevian perspector (στα γαλλικά).

ΠΑΡΑΣΕΒΙΑΝΟ ΚΕΝΤΡΟ ΠΡΟΟΠΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Δίνεται τρίγωνο $\triangle ABC$ και έστω $P, H,$ δύο τυχόντα σημεία στο εσωτερικό του και έστω $H_aH_bH_c,$ το σεβιανό τρίγωνο του $\triangle ABC.$ Οι δια του σημείου P παράλληλες ευθείες προς τις $AH, BH, CH,$ τέμνουν τις πλευρές $BC, AC, AB,$ στα σημεία έστω $P_a, P_b, P_c,$ αντιστοίχως. Οι δια του σημείου P παράλληλες ευθείες προς τις $BC, AC, AB,$ τέμνουν τις ευθείες $AH, BH, CH,$ στα σημεία έστω $A_p, B_p, C_p,$ αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι οι ευθείες $A_pP_a, B_pP_b, C_pP_c,$ τέμνονται στο ίδιο σημείο έστω $Q,$ το οποίο ταυτίζεται με το μέσον του τμήματος $PR,$ όπου R είναι το $H-Ceva$ συζυγές του $P,$ ως προς το δοσμένο τρίγωνο $\triangle ABC.$

2η ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

- Σύμφωνα με την **Βοηθητική πρόταση** πιο πάνω, έχουμε ότι οι ευθείες $DE', EF', D'F$ ορίζουν το τρίγωνο $\triangle A'B'C',$ του οποίου οι κορυφές $A', B', C',$ ανήκουν στις ευθείες AP, BP, CP αντιστοίχως και ότι οι ευθείες $A_pP_a, B_pP_b, C_pP_c,$ περνάνε από τα σημεία $A', B', C',$ αντιστοίχως.

- Έχει επίσης αποδειχθεί στα προηγούμενα, ότι οι δια των κορυφών A, B, C του δοσμένου τριγώνου $\triangle ABC,$ παράλληλες ευθείες προς τις $B'C', A'C', A'B'$ αντιστοίχως, ορίζουν το τρίγωνο $\triangle A''B''C'',$ του οποίου οι κορυφές $A'', B'', C'',$ ανήκουν επίσης στις ευθείες AP, BP, CP αντιστοίχως και ισχύουν $PA' = A'A''$ και $PB' = B'B''$ και $PC' = C'C''.$

- Το δοσμένο τρίγωνο $\triangle ABC,$ είναι το **Σεβιανό τρίγωνο** του σημείου $P,$ ως προς το τρίγωνο $\triangle A''B''C''.$

Ισχύει δηλαδή $A''A \cap B''B \cap C''C \equiv P$ και από την εκφώνηση έχουμε $AH_a \cap BH_b \cap CH_c \equiv H.$

Έτσι, σύμφωνα με το **Cevian Nests Theorem**, έχουμε ότι οι ευθείες $A''H_a, B''H_b, C''H_c$ τέμνονται στο ίδιο σημείο έστω $R,$ γνωστό ως το $H-Ceva$ συζυγές σημείο του $P,$ ως προς το δοσμένο τρίγωνο $\triangle ABC.$

- Έχει αποδειχθεί πιο πάνω ότι $B'B_p \parallel B''H_b \equiv B''R$ και έτσι, στο τρίγωνο $\triangle PRB''$ από $PB' = B'B'',$ σύμφωνα με το **Θεώρημα Θαλή**, προκύπτει ότι η ευθεία $B'B_p \equiv B_pP_b$ περνάει από το μέσον έστω $Q,$ του τμήματος $PR.$

Ομοίως, οι ευθείες A_pP_a, B_pP_b περνάνε από το σημείο Q και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

- Η απόδειξη αυτή είναι αφιερωμένη σε ένδειξη τιμής στη μνήμη του **Vladimir Zajik**, Τσέχου Φυσικού με εντυπωσιακές γνώσεις στη Γεωμετρία και πάμπολλες εμπνευσμένες αποδείξεις στο φόρουμ **AoPS**.