ΟΡΘΟΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Ότι περιγράφεται στα επόμενα, είναι αναπαραγωγή για την ιστοσελίδα, εργασίας που είχα ετοιμάσει και στείλει στο περιοδικό ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ, του Παραρτήματος της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, στην Βέροια τον Μάϊο του 2005, με την προσθήκη σχετικής πρότασης (ΠΡΟΤΑΣΗ 4) που δημοσιεύτηκε τον Αύγουστο του 2007 στο φόρουμ **AoPS**, από τον **Omid Hatami**, από το ΙΡΑΝ.

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν αποδεικτικές προτάσεις, μερικές των οποίων είναι γνωστά "επώνυμα" θεωρήματα, που αφορούν σε κατηγορίες σχημάτων που κατασκευάζονται επί των πλευρών ενός τριγώνου, προς το εξωτερικό, ή το εσωτερικό μέρος αυτού.

Προτάσεις ως άνω, με ισόπλευρα ή όμοια ισοσκελή τρίγωνα, περιλαμβάνονται στο πλήθος εκείνο που θα μπορούσε να ονομαστεί Γεωμετρία προτάσεων τύπου **Steiner,** ή για συντομία, **Γεωμετρία Steiner.**

Με τον ίδιο τρόπο, η **Γεωμετρία Vecten** περιλαμβάνει το πλήθος των προτάσεων που αφορούν σε τετράγωνα ή ορθογώνια παραλληλόγραμμα, επί των πλευρών ενός τριγώνου και τέτοιες προτάσεις εξετάζονται παρακάτω, πρωτοεμφανιζόμενες (;) στην Ελληνική βιβλιογραφία.

Εντόπισα όμως στο διαδίκτυο http://forumgeom.fau.edu (νοιώθοντας ευχάριστη έκπληξη), σχετικό άρθρο (τόμος 2003, σελιδες 145 έως 159), του συμπατριώτη μας **Νίκου Δεργιαδέ** (κοινή δημοσίευση με **Flour van Lamoen**), όπου ο αναγνώστης θα βρει αρκετά ενδιαφέροντα θέματα **Γεωμετρίας Vecten.** Οι αποδείξεις που δίδονται, βασίζονται στη θεωρία των Βαρυκεντρικών Συντεταγμένων και είναι μία ωραία πρόκληση να προσπαθήσει κάποιος την απόδειξή τους, με την Κλασσική Γεωμετρία.

Μερικές από τις προτάσεις που υπάρχουν στο άρθρο αυτό, αποδεικνύονται εδώ με τα εφόδια της σχολικής (της εκτεταμένης έστω) Γεωμετρίας. Υπάρχουν επίσης και μερικές καινούργιες.

Η παρούσα εργασία αφιερώνεται σε ένδειξη τιμής στον εξαίρετο Γεωμέτρη **Νίκο Δεργιαδέ,** ο οποίος τιμά την πατρίδα μας με τις δημοσιευμένες εργασίες του σε ξένα περιοδικά και μας γεμίζει με χαρά και υπερηφάνεια. Του εύχομαι ολόψυχα να είναι πάντα παραγωγικός σε νέες ιδέες στη γεωμετρία.

ΛΙΓΑ ΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΝΙΚΟ ΔΕΡΓΙΑΔΕ

Ο Νίκος Δεργιαδές ζει και δημιουργεί στην Θεσσαλονίκη, όπου γενήθηκε και είναι απόφοιτος του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, στο Πειραματικό Σχολείο του οποίου υπηρέτησε ως καθηγητής Μαθηματικών.

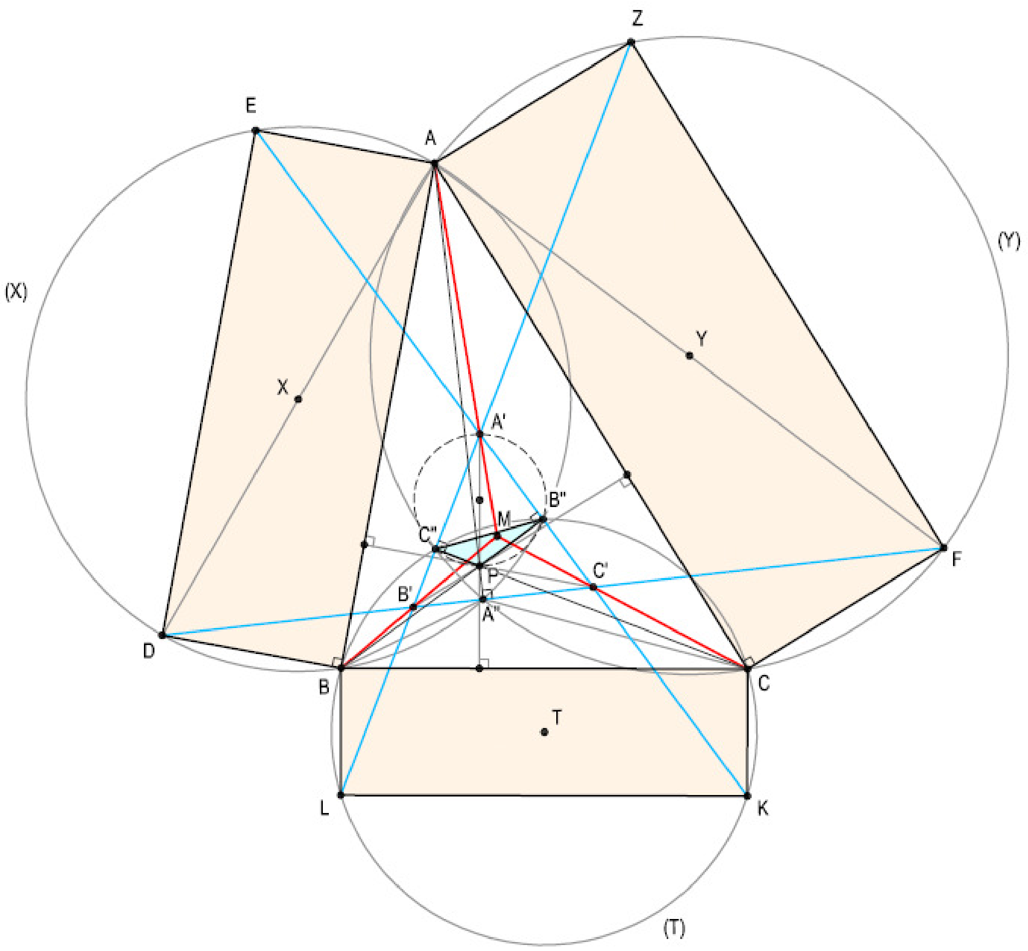
Είναι συγγραφέας πλείστων εργασιών με γεωμετρικά θέματα και όχι μόνο, δημοσιευμένα σε ελληνικά και ξένα περιοδικά και γνωστός δυνατός λύτης προβλημάτων σε γεωμετρικά δρώμενα μέσω Διαδικτύου.

Ο Νίκος Ιωσηφίδης, φίλος και συμφοιτητής του στο Πανεπιστήμιο, μου είπε κάποτε: Ο Νίκος Δεργιαδές είναι μεγάλο μυαλό και το ότι δεν είναι διάσημος ευρύτερα, οφείλεται στην σεμνότητα και την ταπεινοφροσύνη του.

Η αρχειοθέτηση των γραπτών του σε έντυπη ή ηλεκτρονική μορφή, προσβάσιμη στον ενδιαφερόμενο αναγνώστη, θα ήταν μεγάλο ευτύχημα.

ΟΡΘΟΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ – ΠΡΟΤΑΣΗ 1

Με βάσεις τις πλευρές τριγώνου $\triangle ABC$ και προς το εξωτερικό μέρος αυτού, κατάσκευάζουμε τυχόντα ορθογώνια παραλληλόγραμμα $ABDE$, $ACFZ$, $BCKL$ και έστω τα σημεία $A' \equiv EK \cap ZL$, $B' \equiv ZL \cap DF$, $C' \equiv DF \cap EK$. Αποδείξτε ότι οι ευθείες AA', BB', CC' τέμνονται στο ίδιο σημείο.



1η ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τους κύκλους (X), (Y), (T), τους περιγεγραμμένους αντιστοίχως περί τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα $ABDE$, $ACFZ$, και $BCKL$.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι το δεύτερο σημείο τομής των κύκλων (X), (Y), έστω A'', κείται επί της ευθείας DF.

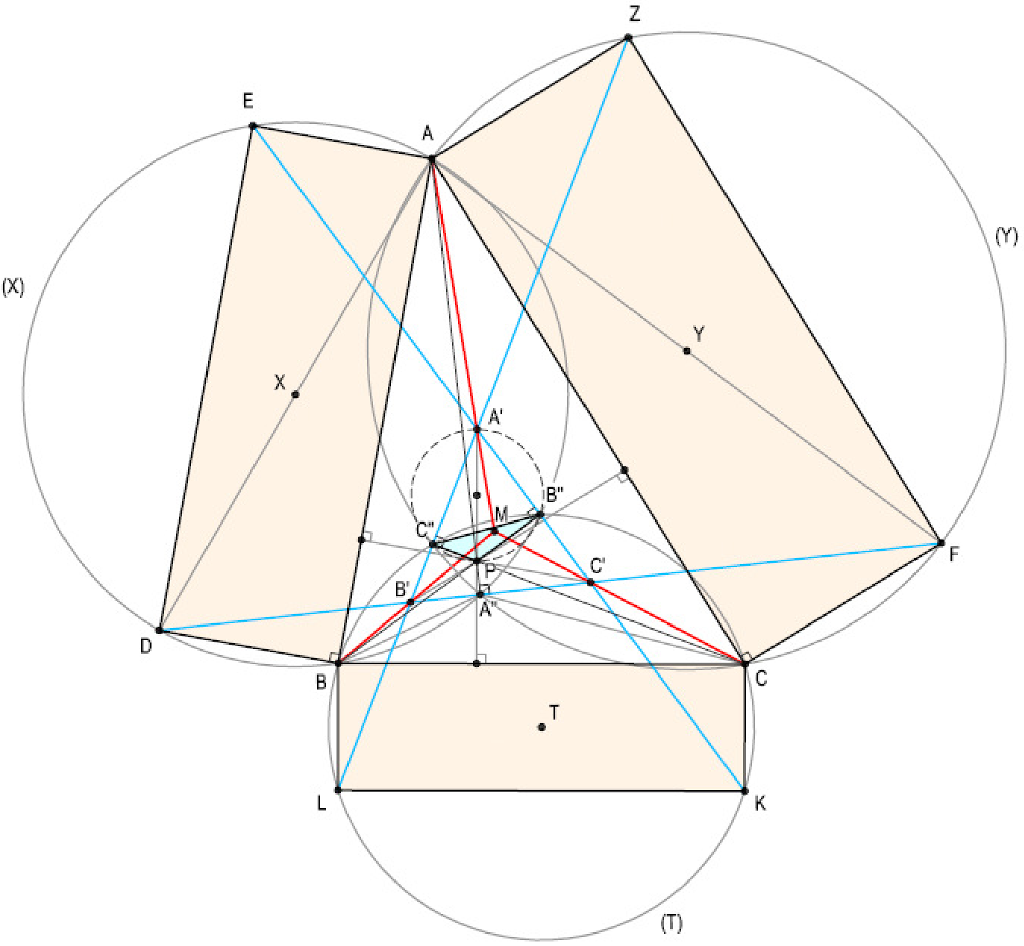
Πράγματι από τα εγγράψιμα τετράπλευρα $AA''BD$ και $AA''CF$, έχουμε $\angle AA''D = \angle ABD = 90^\circ$ και $\angle AA''F = \angle ACF = 90^\circ$ οπότε τα σημεία D, A'', F, είναι συνευθειακά και $AA'' \perp DF$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $BB'' \perp EK$ και $CC'' \perp ZL$, όπου $B'' \equiv (X) \cap (T)$ και $C'' \equiv (Y) \cap (T)$.

Οι ευθείες τώρα AA'', BB'', CC'', ΓΓ'', είναι ριζικοί άξονες των τεμνομένων ανά δύο, τριών ως άνω κύκλων και άρα συντρέχουν στο ίδιο σημείο, έστω P, που είναι το ριζικό τους κέντρο.

Αποδεικνύεται δηλαδή ότι οι εκ των κορυφών A, B, C του τριγώνου $\triangle ABC$, κάθετες ευθείες AA'', BB'', CC'', επί των πλευρών αντιστοίχως $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$ του τριγώνου $\triangle A'B'C'$, τέμνονται στο ίδιο σημείο.

Σύμφωνα με το παρακάτω γνωστό **Λήμμα 1**, προκύπτει ότι και οι εκ των κορυφών του $A'B'C'$ κάθετες ευθείες επί των πλευρών BC, AC, AB του $\vartriangle ABC$ αντιστοίχως τέμνονται στο ίδιο σημείο (τρίγωνα ορθολογικά) και θα αποδειχθεί ότι το σημείο στο οποίο συντρέχουν, ταυτίζεται με το σημείο P.



● Παρατηρούμε ότι ο κύκλος (T) διέρχεται δια των σημείων B'', C'', κορυφών του τριγώνου $B''PC''$ και τέμνει τις πλευρές (τις προεκτάσεις τους) PB'', PC'', στα σημεία B, C, αντιστοίχως.

Επομένως, σύμφωνα με το παρακάτω γνωστό επίσης **Λήμμα 2**, η ευθεία που συνδέει το κέντρο του περικύκλου του τριγώνου $\vartriangle B''PC''$, με την κορυφή του P, είναι κάθετη επί την ευθεία BC.

Επειδή τώρα η $A'P$ είναι διάμετρος αυτού του κύκλου λόγω του εγγραψίμου τετραπλεύρου $A'B''PC''$ (από $\angle A'B''P = 90^\circ = \angle A'C''P$), συμπεραίνουμε ότι $A'P \perp BC$ και ομοίως αποδεικνύεται ότι ισχύει $B'P \perp AC$ και $C'P \perp AB$.

Έχει αποδειχθεί μέχρι τώρα, ότι τα τρίγωνα $\vartriangle ABC$, $\vartriangle A'B'C'$ είναι ορθολογικά και ότι τα ορθοπολικά τους σημεία συμπίπτουν, ως ταυτιζόμενα με το σημείο P.

Σύμφωνα με το παρακάτω γνωστό **Λήμμα 3**, προκύπτει ότι τα τρίγωνα αυτά είναι και προοπτικά, οπότε οι ευθείες AA', BB', CC', τέμνονται στο ίδιο σημείο και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

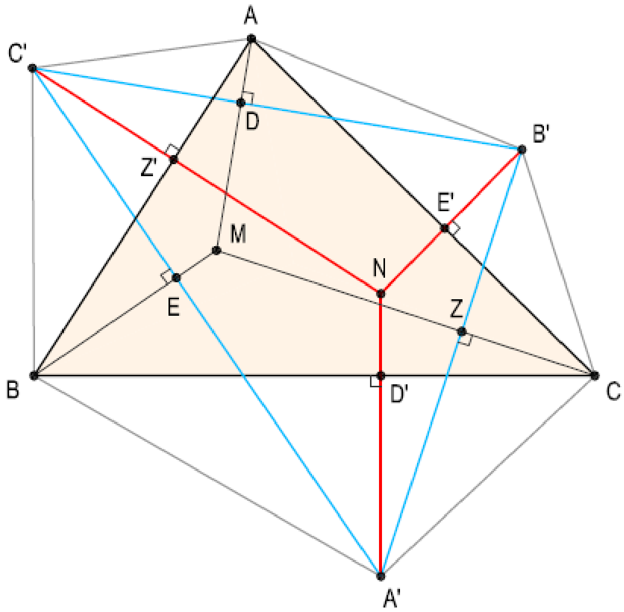
ΛΗΜΜΑ 1 - ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ ΟΡΘΟΛΟΓΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Δίνονται δύο τρίγωνα $\vartriangle ABC$ και $A'B'C'$ και έστω ότι οι δια των σημείων A, B, C, κάοετες ευθείες επί των ευθειών των πλευρών $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$ του τριγώνου $\vartriangle A'B'C'$ αντιστοίχως, τέμνονται στο ίδιο σημείο, έστω το M. Αποδείξτε ότι και οι δια των σημείων A', B', C', κάθετες ευθείες επί των ευθειών των πλευρών BC, AC, AB του τριγώνου $\vartriangle ABC$ αντιστοίχως, τέμνονται στο ίδιο σημείο, έστω το N.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η πρόταση αυτή είναι γνωστή από την βιβλιογραφία και η γνωστή επίσης απόδειξή της όπως περιγράφεται παρακάτω, δεν είναι απαραίτητη για την υποστήριξη της τεκμηρίωσης στην απόδειξη του αρχικού προβλήματος (ΠΡΟΤΑΣΗ 1).

Ο λόγος που εμφανίζεται εδώ είναι επειδή ήταν επιθυμία μου να διατηρήσω το κείμενο όπως είναι γραμμένο σε σχετική εργασία που έστειλα το 2004 στο περιοδικό ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ, του παραρτήματος της ΕΜΕ στην Βέροια.



- Έστω M, το σημείο τομής των δια των A, B, C, καθέτων ευθειών επί των πλευρών $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$, του τριγώνου $A'B'C'$ αντιστοίχως και D, E, Z, τα σημεία τομής των με αυτές.

Σύμφωνα με το **θεώρημα Carnot** ισχύει:

$\boxed{(DB')^2 + (EC')^2 + (ZA')^2 = (DC')^2 + (EA')^2 + (ZB')^2}$ (1)

- Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\vartriangle ADB'$ έχουμε $(DB')^2 = (AB')^2 - (AD)^2$ (2) και ομοίως:

$(EC')^2 = (BC')^2 - (BE)^2$ (3) και $(ZA')^2 = (CA')^2 - (CZ)^2$ (4) και $(DC')^2 = (AC')^2 - (AD)^2$ (5)

$(EA')^2 = (BA')^2 - (BE)^2$ (6) και $(ZB')^2 = (CB')^2 - (CZ)^2$ (7)

Από (1), (2), ..., (7) $\Rightarrow$ $\boxed{(AB')^2 + (BC')^2 + (CA')^2 = (AC')^2 + (BA')^2 + (CB')^2}$ (8)

- Έστω D', E', Z', οι προβολές των A', B', C', επί των πλευρών BC, AC, AB του τριγώνο $\vartriangle ABC$ αντιστοίχως και θα αποδειχθεί ότι οι ευθείες $A'D'$, $B'E'$, $C'Z'$, είναι συντρέχουσες.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\vartriangle AEB'$ έχουμε $(AB')^2 = (E'A)^2 + (B'E')^2$ (9) και ομοίως:

$(BC')^2 = (Z'B)^2 + (C'Z')^2$ (10) και $(CA')^2 = (D'C)^2 + (A'D')^2$ (11) και $(AC')^2 = (Z'A)^2 + (C'Z')^2$ (12)

$(BA')^2 = (D'B)^2 + (A'D')^2$ (13) και $(CB')^2 = (E'C)^2 + (B'E')^2$ (14)

Από (8), (9), ..., (14) $\Rightarrow$ $\boxed{(D'B)^2 + (E'C)^2 + (Z'A)^2 = (D'C)^2 + (E'A)^2 + (Z'B)^2}$ (15)

- Από την (15), σύμφωνα με το αντίστροφο του **Θεωρήματος Carnot**, συμπεραίνεται ότι οι ευθείες $A'D'$, $B'E'$, $C'Z'$, τέμνονται στο ίδιο σημείο έστω N και το **Λήμμα 1** έχει αποδειχθεί.

- Τα τρίγωνα $\triangle ABC$, και $\triangle A'B'C'$ ονομάζονται **Ορθολογικά τρίγωνα** και τα σημεία M, N, **Ορθοπολικά σημεία** του ενός τριγώνου ως προς το άλλο (π.χ. το σημείο M είναι το **Ορθοπολικό σημείο** του $\triangle ABC$ ως προς το $A'B'C'$ κ.ο.κ.).

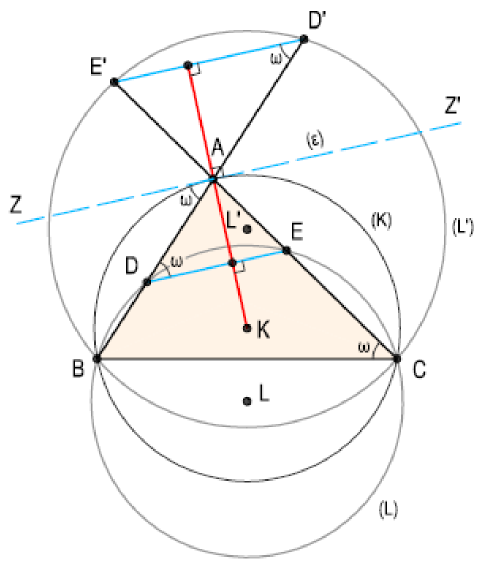
ΛΗΜΜΑ 2

Με χορδή την πλευρά BC δοσμένου τριγώνου $\triangle ABC$, γράφουμε τυχόντα κύκλο (L) ο οποίος τέμνει τις ευθείες των πλευρών AB, AC στα σημεία D, E, αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι $KA \perp DE$, όπου K είναι το κέντρο του περικύκλου (K) του $\triangle ABC$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Γνωστό επίσης από την βιβλιογραφία το **Λήμμα 2** και η απλή απόδειξή του, η οποία μπορεί να παραλείπεται στην τεκμηρίωση επίλυσης γεωμετρικού προβλήματος.

Εμφανίζεται εδώ, για τον ίδιο λόγο όπως και στο **Λήμμα 1**.



- Από εγγράψιμο τετράπλευρο $BCED$ έχουμε:

$$\angle BCA = \angle EDA = \angle \omega \qquad (1)$$

Φέρνουμε την ευθεία (ε), εφαπτομένη του κύκλου (K) στο σημείο A και έχουμε $\angle BAZ = \angle BCA = \angle \omega \qquad (2)$

Από (1), (2) $\Rightarrow$ $\angle BAZ = \angle EDA = \angle \omega$ $\Rightarrow$ $DE \parallel (\varepsilon)$ και επειδή ισχύει $AK \perp (\varepsilon)$ συμπεραίνεται ότι $AK \perp DE$ και το **Λήμμα 2** έχει αποδειχθεί.

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι ισχύει και $AK \perp D'E'$, όπου D', E' είναι τα σημεία τομής των προεκτάσεων των ευθείων των πλευρών AB, AC αντιστοίχως, από τυχόντα κύκλο (L') χορδής BC.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Οι ευθείες ως άνω DE, $D'E'$, ονομάζονται **Αντιπαράλληλες ευθείες** της ευθείας BC, ως προς τις ευθείες της γωνίας $\angle A$. Η βασική ιδιότητα δύο αντιπαράλληλων ευθειών, είναι η ισογωνιότητα των ομόλογων ευθειών τους δια της κορυφής της αντίστοιχης γωνίας.

Εάν για παράδειγμα θεωρήσουμε τις κάθετες ευθείες δια της κορυφής A της γωνίας $\angle A$ στο ως άνω σχήμα, επί των αντιπαράλληλων ευθειών BC, DE, οι ευθείες αυτές είναι ισογώνιες ως προς την γωνία $\angle A$.

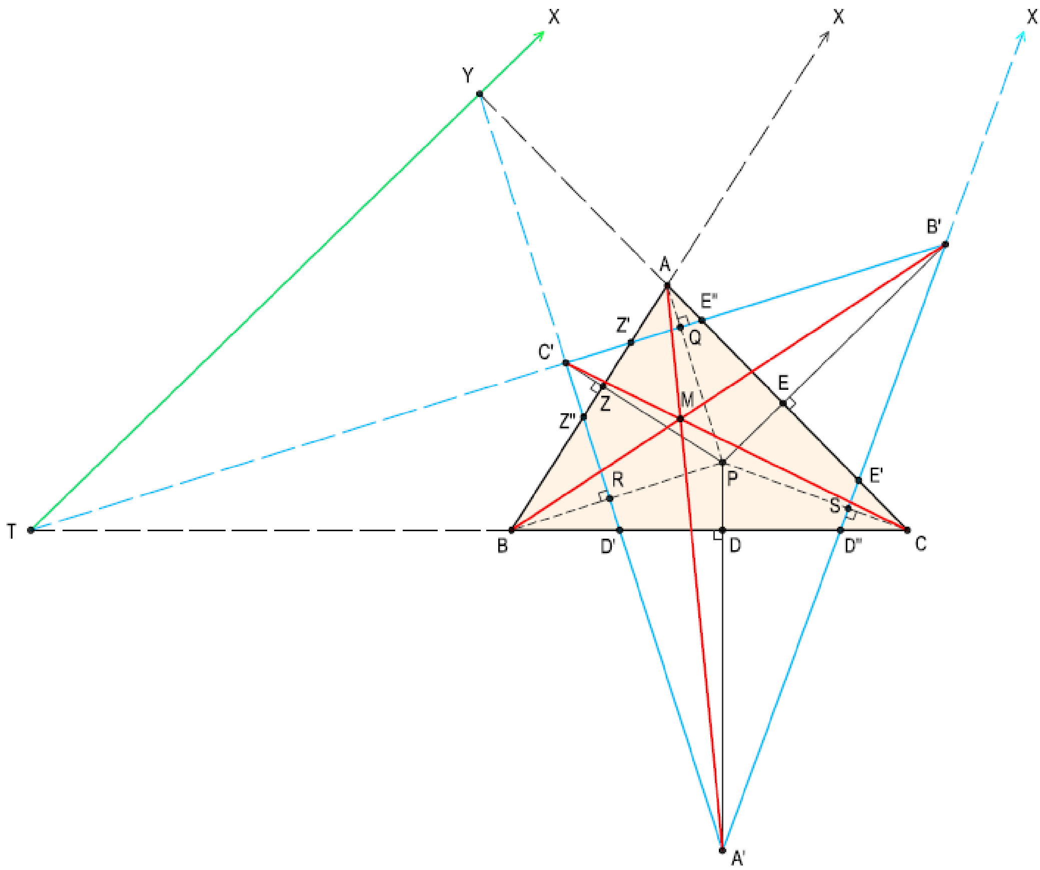
Το ίδιο ισχύει για τις διαμέσους των τριγώνων $\triangle ABC$, $\triangle AED$, κ.ο.κ. και η ισογωνιότητά τους προκύπτει άμεσα από την ομοιότητα των ίδιων τριγώνων, με κοινή την γωνία $\angle A$.

ΛΗΜΜΑ 3

Δίνεται τρίγων $\triangle ABC$, τυχόν σημείο P στο εσωτερικό του και έστω D, E, Z αντιστοίχως, οι προβολές του P επί των πλευρών BC, AC, AB. Από τυχόν σημείο A' επί της ευθείας PD, φέρνουμε τις κάθετες ευθείες επί των PC, PB και έστω B', C' τα σημεία τομής των αντιστοίχως, με τις ευθείες PE, PZ. Αποδείξτε ότι:

α) Η ευθεία $B'C'$ είναι κάθετη επί την PA.

β) Οι ευθείες AA', BB', CC', τέμνονται στο ίδιο σημείο.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

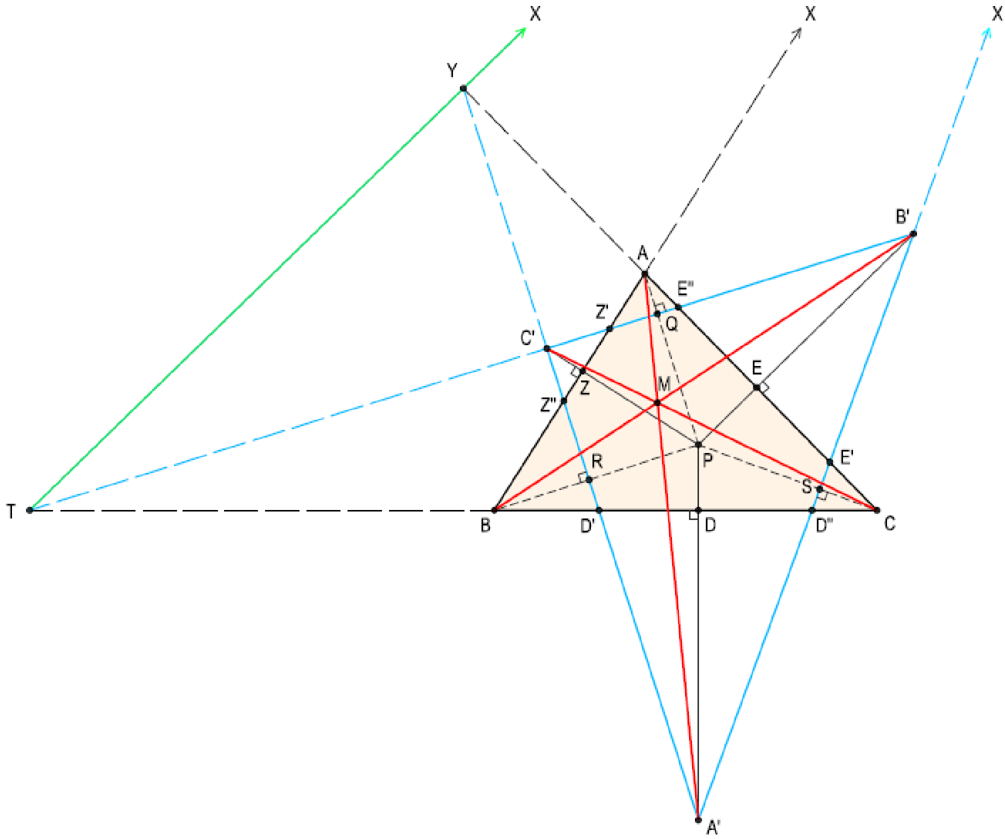
● Εκ κατασκευής έχουμε τις ευθείες $A'D$, $B'E$, $C'Z$, δια των κορυφών A', B', C' του τριγώνου $\triangle A'B'C'$, κάθετες αντιστοίχως επί των πλευρών BC, AC, AB του τριγώνου $\triangle ABC$ και οι οποίες συντρέχουν στο σημείο P.

Άρα και οι δια των σημείων A, B, C κάθετες ευθείες αντιστοίχως επί των πλευρών $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$ του τριγώνου $\triangle A'B'C'$, θα είναι συντρέχουσες (**Λήμμα 1**).

Ήδη όμως οι δια των σημείων B, C κάθετες ευθείες επί των $A'C'$, $A'B'$ αντιστοίχως, διέρχονται εκ κατασκευής δια του σημείου P. Επομένως και η διά του σημείου A κάθετη ευθεία επί την $B'C'$, διέρχεται δια του P και το **(α)** ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

● Θα αποδείξουμε τώρα, ότι οι ευθείες AA', BB', και CC', τέμνονται στο ίδιο σημείο.

- Έστω τα σημεία $T \equiv BC \cap B'C'$, $Y \equiv AC \cap A'C'$, $X \equiv AB \cap A'B'$ και αρκεί, σύμφωνα με το **Θεώρημα Desarques**, να αποδειχθεί ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά.



Στο τρίγωνο $\triangle ABC$ εφαρμόζουμε το **Θεώρημα του Μενελάου**, με διατέμνουσες διαδοχικά τις ευθείες $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$ και έχουμε:

Με διατέμνουσα την $B'C'$ $\Rightarrow \dfrac{TB}{TC}\cdot\dfrac{E''C}{E''A}\cdot\dfrac{Z'A}{Z'B}=1 \Rightarrow \dfrac{TB}{TC}=\dfrac{E''A}{E''C}\cdot\dfrac{Z'B}{Z'A}$ (1)

Με διατέμνουσα την $A'C'$ $\Rightarrow \dfrac{YC}{YA}\cdot\dfrac{Z''A}{Z''B}\cdot\dfrac{D'B}{D'C}=1 \Rightarrow \dfrac{YC}{YA}=\dfrac{Z''B}{Z''A}\cdot\dfrac{D'C}{D'B}$ (2)

Με διατέμνουσα την $A'B'$ $\Rightarrow \dfrac{XA}{XB}\cdot\dfrac{D''B}{D''C}\cdot\dfrac{E'C}{E'A}=1 \Rightarrow \dfrac{XA}{XB}=\dfrac{D''C}{D''B}\cdot\dfrac{E'A}{E'C}$ (3)

Από (1), (2), (3) $\Rightarrow \boxed{\dfrac{TB}{TC}\cdot\dfrac{YC}{YA}\cdot\dfrac{XA}{XB}=\left(\dfrac{E'A}{E'C}\cdot\dfrac{D'C}{D'B}\cdot\dfrac{Z'B}{Z'A}\right)\cdot\left(\dfrac{E''A}{E''C}\cdot\dfrac{D''C}{D''B}\cdot\dfrac{Z''B}{Z''A}\right)}$ (4)

Αρκεί τώρα, να αποδειχθεί ότι το δεύτρο μέλος της (4) ισούται με 1.

- Έστω τα σημεία $Q \equiv PA \cap B'C'$ και $R \equiv PB \cap A'C'$ και $S \equiv PC \cap A'B'$.

Από τα τετράπλευρα $EE''QP$, $ZZ'QP$, εγγράψιμα γιατί έχουν δύο απέναντι γωνίες τους ορθές, έχουμε:

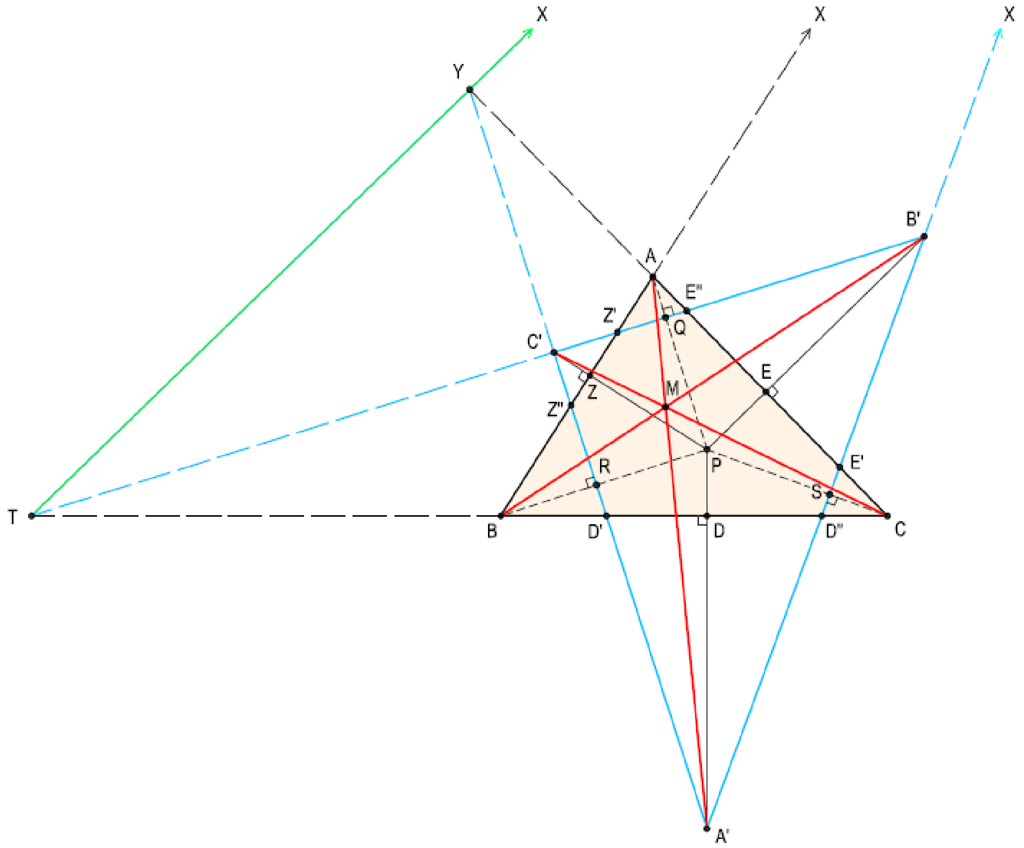
$$(E''A)(EA)=(QA)(PA) \quad (5) \quad \text{και} \quad (Z'A)(ZA)=(QA)(PA) \quad (6)$$

$$\text{Από (5), (6)} \Rightarrow (E''A)(EA)=(Z'A)(ZA) \Rightarrow \frac{E''A}{Z'A}=\frac{ZA}{EA} \quad (7)$$

Ομοίως, από τα εγγράψιμα τετράπλευρα $DD''SP$, $EE'SP$ προκύπτει $\dfrac{D''C}{E'C}=\dfrac{EC}{DC}$ (8)

Ομοίως, από τα εγγράψιμα τετράπλευρα $ZZ''RP$, $DD'RP$ προκύπτει $\dfrac{Z''B}{D'B}=\dfrac{DB}{ZB}$ (9)

Από (7), (8), (9) $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{E''A}{E'C}\cdot\dfrac{D''C}{D'B}\cdot\dfrac{Z''B}{Z'A}=\dfrac{EC}{EA}\cdot\dfrac{DB}{DC}\cdot\dfrac{ZA}{ZB}}$ (10)



● Από όμοια ορθογώνια τρίγωνα $\triangle PEC$, $\triangle B'EE'$, (γιατί έχουν $\angle ECP=\angle EB'E'$) και $\triangle PEA$, $\triangle B'EE''$ (γιατί έχουν $\angle PAE=\angle EB'E''$) προκύπτει ότι:

$$\frac{EE'}{PE}=\frac{EB'}{EC}\ \Rightarrow\ EE'=PE\cdot\frac{EB'}{EC}\quad(11)\quad\text{και}\quad \frac{EE''}{PE}=\frac{EB'}{EA}\ \Rightarrow\ EE''=PE\cdot\frac{EB'}{EA}\quad(12)$$

Από (11), (12) $\Rightarrow \dfrac{EE'}{EE''}=\dfrac{EA}{EC} \Rightarrow \dfrac{EE'}{EA}=\dfrac{EE''}{EC} \Rightarrow \dfrac{EE'+EA}{EA}=\dfrac{EE''+EC}{EC} \Rightarrow \dfrac{E'A}{E''C}=\dfrac{EA}{EC}$ (13)

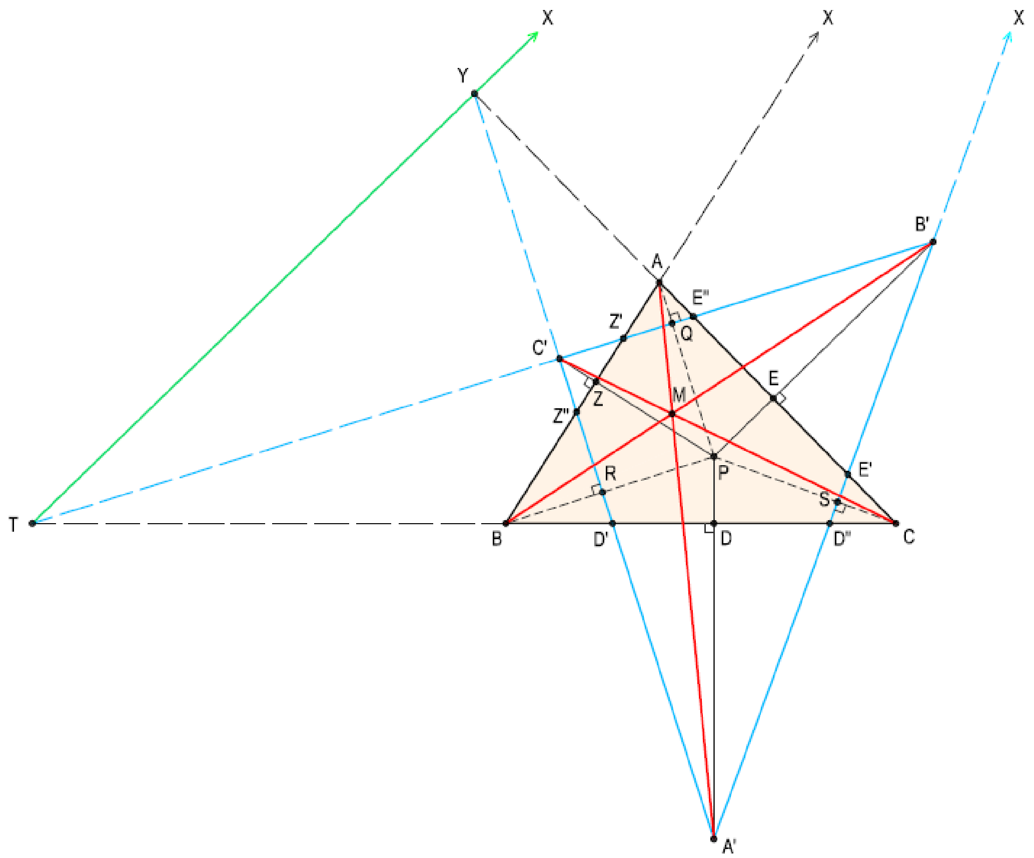
Ομοίως, αποδεικνύεται ότι ισχύει και $\dfrac{D'C}{D''B}=\dfrac{DC}{DB}$ (14) και $\dfrac{Z'B}{Z''B}=\dfrac{ZB}{ZA}$ (15)

Από (13), (14), (15) $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{E'A}{E''C}\cdot\dfrac{D'C}{D''B}\cdot\dfrac{Z'B}{Z''A}=\dfrac{EA}{EC}\cdot\dfrac{DC}{DB}\cdot\dfrac{ZB}{ZA}}$ (16)

Από (10), (16) $\Rightarrow$ $\boxed{\left(\frac{E''A}{E''C}\cdot\frac{D''C}{D''B}\cdot\frac{Z''B}{Z''A}\right)\cdot\left(\frac{E'A}{E'C}\cdot\frac{D'C}{D'B}\cdot\frac{Z'B}{Z'A}\right)=1}$ (17)

Από (4), (17) $\Rightarrow$ $\frac{TB}{TC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{XA}{XB}=1$ και άρα, σύμφωνα με το **Θεώρημα Μενελάου**, συμπεραίνεται

ότι τα σημεία T, Y, X είναι συνευθειακά και το ισοδύναμο ζητούμενο για το **Λήμμα 3** έχει αποδειχθεί.



Αποδείχθηκε δηλαδή, ότι τα ορθολογικά τρίγωνα $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, των οποίων τα ορθοπολικά σημεία συμπίπτουν, ταυτιζόμενα εδώ με το σημείο P, είναι και προοπτικά με $AA'\cap BB'\cap CC'\equiv M$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

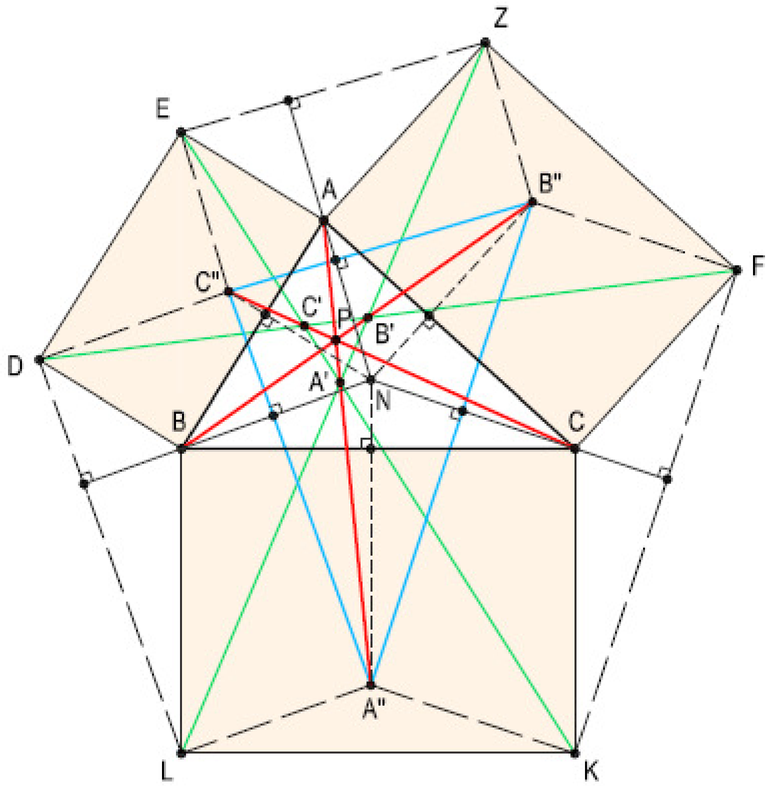
Το **Λήμμα 3** προέκυψε κατά την προσπάθεια απόδειξης της ΠΡΟΤΑΣΗΣ 1 και είναι γνωστό ως προς ξένη βιβλιογραφία, όπως έχω διαπιστώσει τα τελευταία δεκαπέντε χρόνια που συμμετέχω διαδικτυακά σε γεωμετρικά δρώμενα.

Ως προς την ελληνική βιβλιογραφία όμως που έχω υπόψη μου, το έχει ανακαλύψει και πρώτος έχει δημοσιεύσει, ο **Νίκος Κυριαζής** (ΝΕΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ, τεύχος 2, σελίδα 11, Αυτοέκδοση, Θεσσαλονίκη 1996), με την ακόλουθη εκφώνηση:

Εάν τα Ορθοπολικά Σημεία δύο Ορθολογικών τριγώνων συμπίπτουν, τότε τα τρίγωνα αυτά είναι και Προοπτικά (ή **Ομολογικά** όπως επίσης λέγονται).

ΟΡΘΟΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ – ΠΡΟΤΑΣΗ 1

Με βάσεις τις πλευρές τριγώνου $\triangle ABC$ και προς το εξωτερικό μέρος αυτού, κατάσκευάζουμε τυχόντα ορθογώνια παραλληλόγραμμα $ABDE$, $ACFZ$, $BCKL$ και έστω τα σημεία $A' \equiv EK \cap ZL$, $B' \equiv ZL \cap DF$, $C' \equiv DF \cap EK$. Αποδείξτε ότι οι ευθείες AA', BB', CC' τέμνονται στο ίδιο σημείο.



2η ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Στο έστω N, το σημείο τομής των δια των κορυφών B, C καθέτων ευθειών, επί των DL, FK, αντιστοίχως.

Έστω A'', το σημείο τομής των δια των K, L καθέτων ευθειών επίσης επί των KF, LD, και ας είναι B'', C'', τα σημεία ώστε τα $ANB''Z$ και $ANC''E$, να είναι παραλληλόγραμμα.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\triangle BNC$, και $\triangle LA''K$. Είναι ίσα γιατί έχουν $NB \parallel A''L$, $NC \parallel A''K$ και $BC \parallel= LK$ και επομένως, τα $NA''LB$, $NA''KC$ είναι παραλληλόγραμμα και άρα, $NA'' \perp BC$.

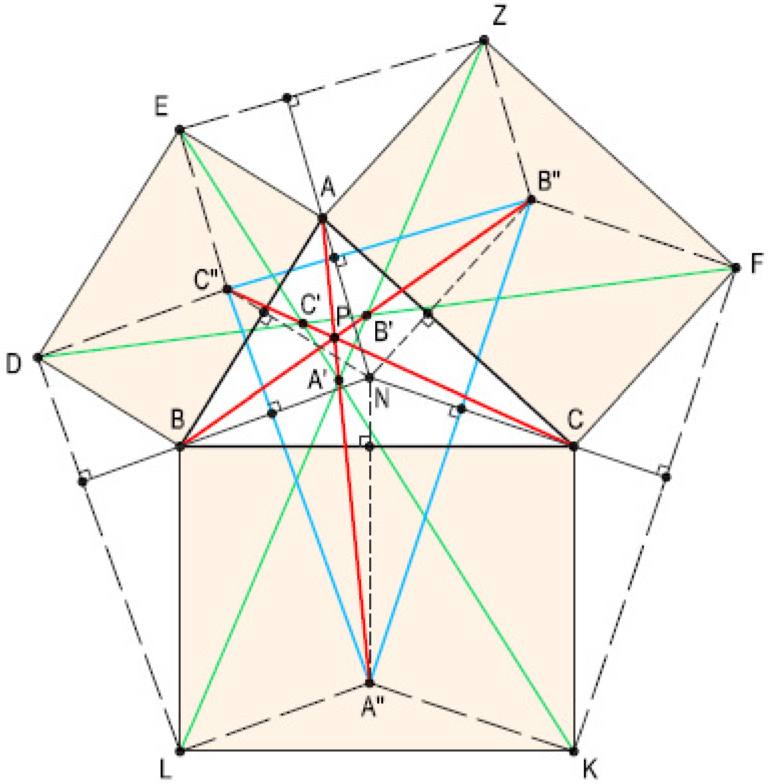
Από τα παραλληλόγραμμα $ANB''Z$ και $ANC''E$, προκύπτει ότι $NB'' \perp AC$ και $NC'' \perp AB$.

Προκύπτει επίσης ότι $B''C'' \parallel= ZE$, από ίσα τρίγωνα $\triangle B''NC''$, $\triangle ZAE$, (γιατί έχουν $NB'' \parallel= AZ$, $NC'' \parallel= AE$ και $\angle B''NC'' = \angle ZAE$).

Από $NA'' \parallel= CK$, $NB'' \parallel= AZ \parallel= CF$ και $\angle A''NB'' = \angle KCF \Rightarrow A''B'' \parallel= KF$ και άρα, το $A''KFB''$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (γιατί $A''K \perp KF$) και επομένως, ισχύει $NC \perp KF$ (1) και με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $NB \perp A''C''$ (2)

● Παρατηρούμε τώρα, ότι οι εκ των σημείων A'', B'', C'', κάθετες ευθείες επί των BC, AC, AB αντιστοίχως, τέμνονται στο ίδιο σημείο, το N και άρα έχουμε (**Λήμμα 1**), ότι και οι εκ των A, B, C, κάθετες ευθείες επί των $B''C''$, $A''C''$, $A''B''$ αντιστοίχως, είναι συντρέχουσες και μάλιστα στο σημείο N, λόγω των (1), (2).

Δηλαδή τα $\triangle ABC$, $A''B''C''$ είναι ορθολογικά τρίγωνα, των οποίων τα ορθοπολικά σημεία συμπίπτουν και σύμφωνα με το **Λήμμα 3**, τα τρίγωνα αυτά είναι και προοπτικά και επομένως, οι ευθείες AA'', BB'', CC'' τέμνονται στο ίδιο σημείο, έστω το P.

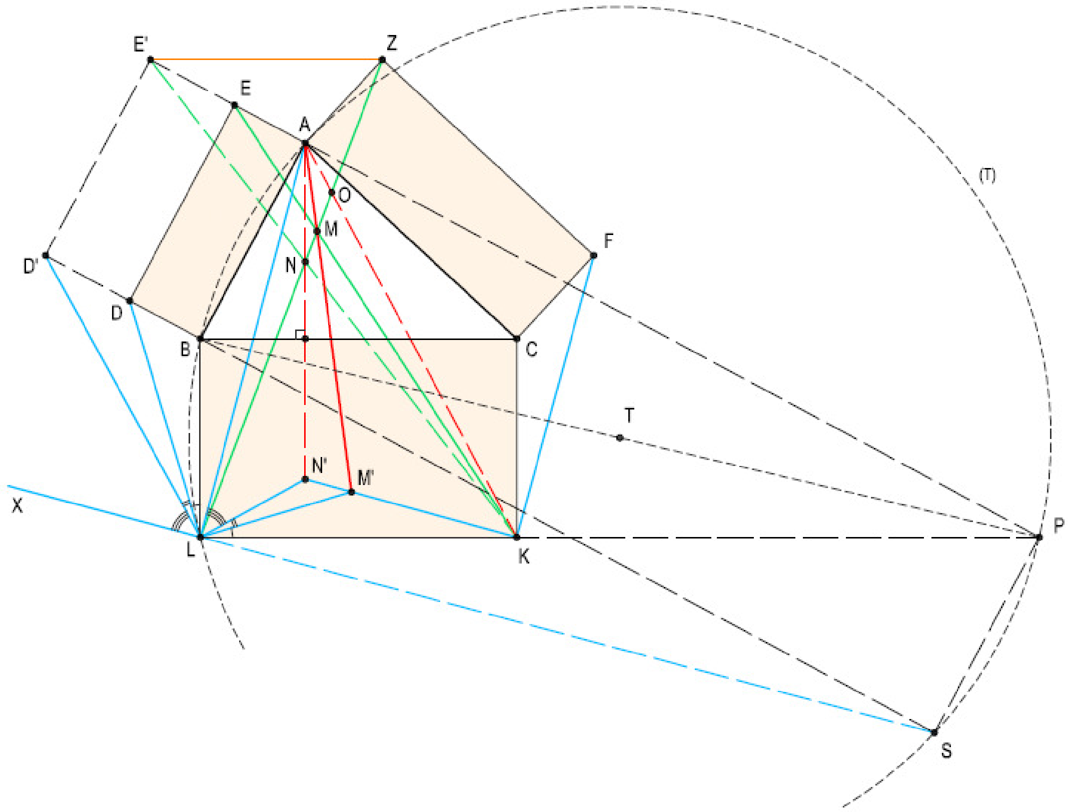


Αποδεικνύεται στα επόμενα (**Λήμμα 4**), ότι το σημείο $A' \equiv EK \cap ZL$, κείται επί της ευθείας AA'' και ομοίως έχουμε, ότι τα σημεία $B' \equiv ZL \cap DF$ και $C' \equiv DF \cap EK$, κείνται αντιστοίχως επί των ευθειών BB'', CC''.

Συμπεραίνεται έτσι, ότι οι ευθείες $AA' \cap BB' \cap CC' \equiv P$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΛΗΜΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $\triangle ABC$ και έστω $ABDE$, $ACFZ$, $BCKL$ τυχόντα ορθογώνια παραλληλόγραμμα προς το εξωτερικό μέρος αυτού. Εάν M, είναι το σημείο τομής των EK, ZL και M', είναι το σημείο τομής των δια των σημείων K, L, καθέτων ευθειών επί των KF, LD αντιστοίχως, αποδείξτε ότι η ευθεία MM' περνάει από το σημείο A.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Από το Z, φέρνουμε την παράλληλη ευθεία προς την πλευρά BC και έστω E', το σημείο τομής της με την ευθεία AE. Έστω επίσης D', σημείο της ευθείας BD ώστε να είναι $D'E' \parallel AB$.

Εάν N, είναι το σημείο τομής των $E'K$, ZL, αποδεικνύεται παρακάτω (**Λήμμα 5**), ότι κείται επί της ευθείας του ύψους εκ της κορυφής A του $\triangle ABC$.

Επίσης εάν N', είναι το σημείο τομής των δια των K, L καθέτων ευθειών, επί των KF, LD' αντιστοίχως, αποδεικνύεται (**Λήμμα 6**) ότι κείται επί της αυτής ως άνω ευθείας του ύψους εκ της κορυφής A του $\triangle ABC$.

- Ορίζουμε ως M', το σημείο τομής της ευθείας AM από την δια του σημείου L κάθετη ευθεία επί την LD και αρκεί να αποδείξουμε ότι το σημείο αυτό, ανήκει στην ευθεία $KN' \perp KF$.

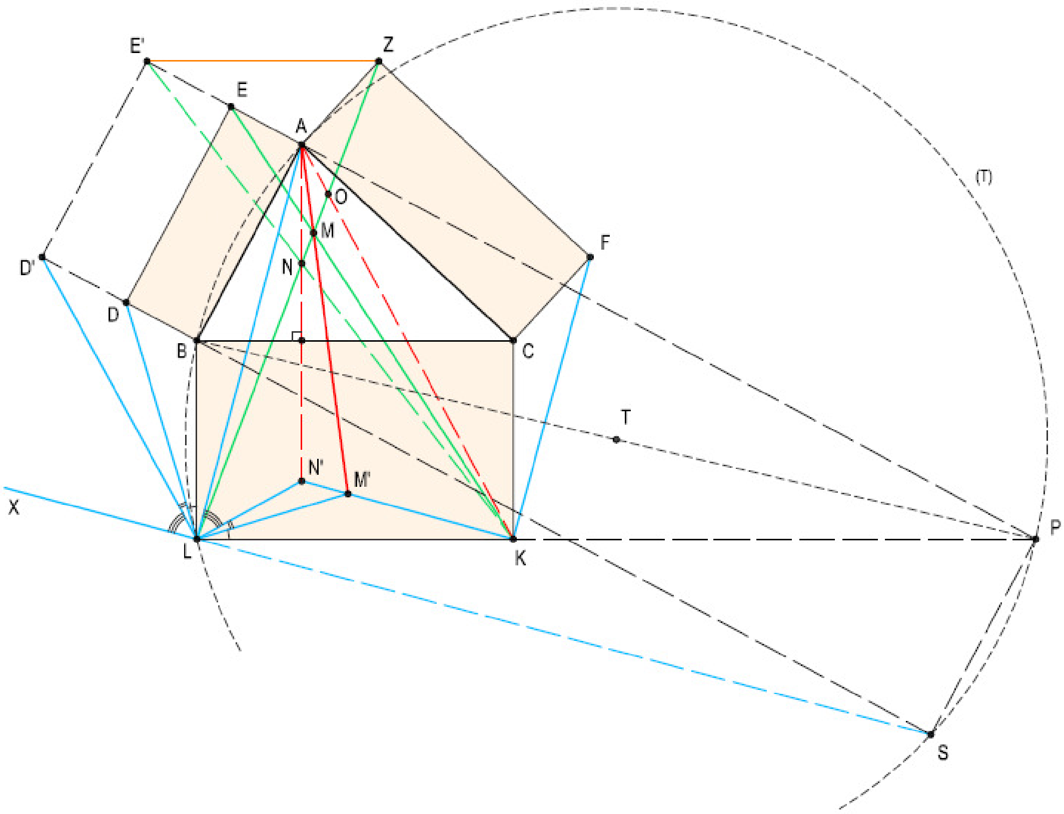
Δια του L, φέρνουμε την ευθεία LX κάθετη επί την AL και παρατηρούμε ότι οι δέσμες $L.AN'M'K$, $L.XD'DB$, έχουν ίσες τις γωνίες των ομόλογων ακτίνων τους και άρα έχουν ίσους Διπλούς λόγους ($\angle ALN' = \angle XLD'$ και $\angle N'LM' = \angle D'LD$ και $\angle M'LK = \angle DLB$)

Ισχύει δηλαδή: $(L.AN'M'K) = (L.XD'DB)$ (1)

Η ευθεία BD τέμνει τη δέσμη $L.XD'DB$ και άρα, έχουμε $(L.XD'DB) = (S, D', D, B)$ (2)

Έστω το σημείο $O \equiv ZL \cap AK$ και έχουμε $(A.LN'M'K) = (L, N, M, O) = (K.LNMO)$ (3)

Αλλά η ευθεία AE τέμνει τη δέσμη $K.LNMO$ και άρα, $(K.LNMO) = (P, E', E, A)$ (4)



• Εύκολα αποδεικνύεται ότι τα σημεία $P \equiv KL \cap AE$, $S \equiv LX \cap BD$, ανήκουν στον περίκυκλο (T) του τριγώνου $\triangle ABL$ (από $ABLP$, $ABLS$ εγγράψιμα τετράπλευρα) και από $AP \perp AB$, $BS \perp AB$, προκύπτει ότι τα σημεία αυτά είναι αντιδιαμετρικά των B, A αντιστοίχως και άρα έχουμε:

$$PS \parallel BA \parallel DE \parallel D'E' \quad \Rightarrow \quad (S, D', D, B) = (P, E', E, A) \qquad (5)$$

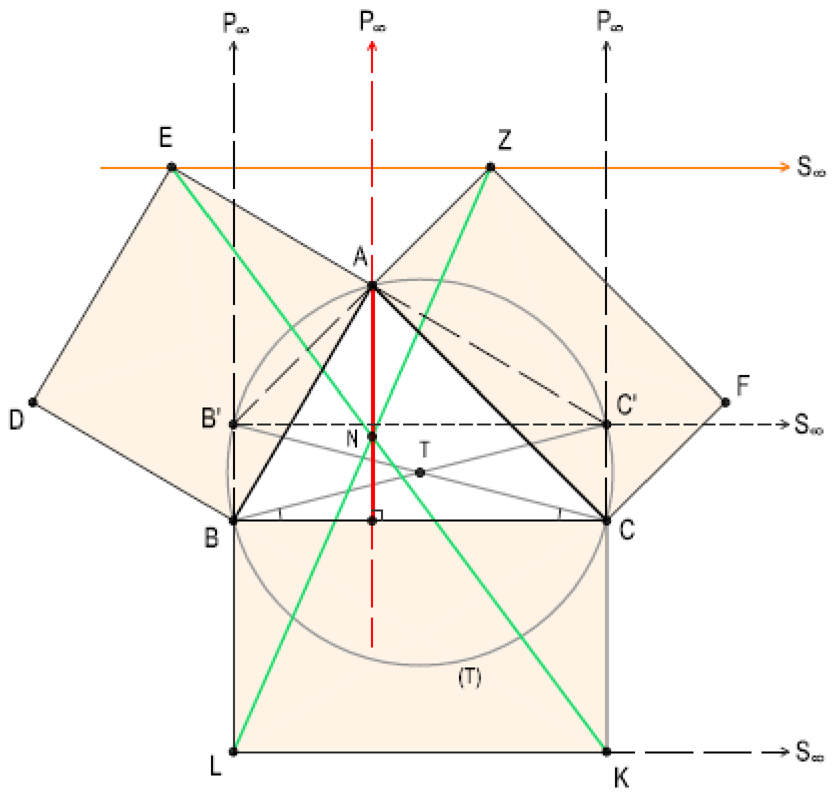
$$\text{Από} \quad (1),\ (2),\ (3),\ (4),\ (5) \quad \Rightarrow \quad (L.AN'M'K) = (A.LNMO) \qquad (6)$$

Από (6) και επειδή οι δέσμες $L.AN'M'K$, $A.LNMO$ έχουν την AL ως κοινή ομόλογη ακτίνα τους, συμπεραίνεται ότι τα σημεία τομής των υπολοίπων ομόλογων ακτίνων τους είναι συνευθειακά.

Τα σημεία επομένως $N' \equiv AN \cap LN'$ και $M' \equiv AM \cap LM'$ και $K \equiv AO \cap LK$, ανήκουν στην ίδια ευθεία και το ισοδύναμο ζητούμενο για το **Λήμμα 4** έχει αποδειχθεί.

ΛΗΜΜΑ 5

Με βάσεις τις πλευρές δοσμένου τριγώνου $\vartriangle ABC$ και προς το εξωτερικό μέρος αυτού, κατασκευάζουμε τα τυχόντα ορθογώνια παραλληλογραμμα $ABDE$, $ACFZ$, $BCKL$, ώστε να ισχύει όμως, $EZ \parallel BC$. Αποδείξτε ότι το σημείο N, τομής των EK, ZL, κείται επί της ευθείας του ύψους εκ της κορυφής A του $\vartriangle ABC$.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω τα σημεία $B' \equiv AZ \cap BL$, $C' \equiv AE \cap CK$ και αποδεικνύεται εύκολα ότι $BB' = CC'$ (1)

Πράγματι, τα τετράπλευρα $ABCC'$, $ACBB'$ είναι εγγράψιμα στον περίκυκλο έστω (T) του τριγώνου $\vartriangle ABC$ και τα B', C' είναι αντιδιαμετρικά σημεία των C, B, αντιστοίχως.

Από (1) $\Rightarrow$ $B'C' \parallel BC \parallel LK$ (2)

Εάν N, είναι το σημείο τομής των EK, ZL, παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα $\vartriangle AB'C'$, NLK, είναι έτσι διατεταγμένα, ώστε οι ευθείες των πλευρών τους ανά δύο, να τέμνονται σε συνευθειακά σημεία.

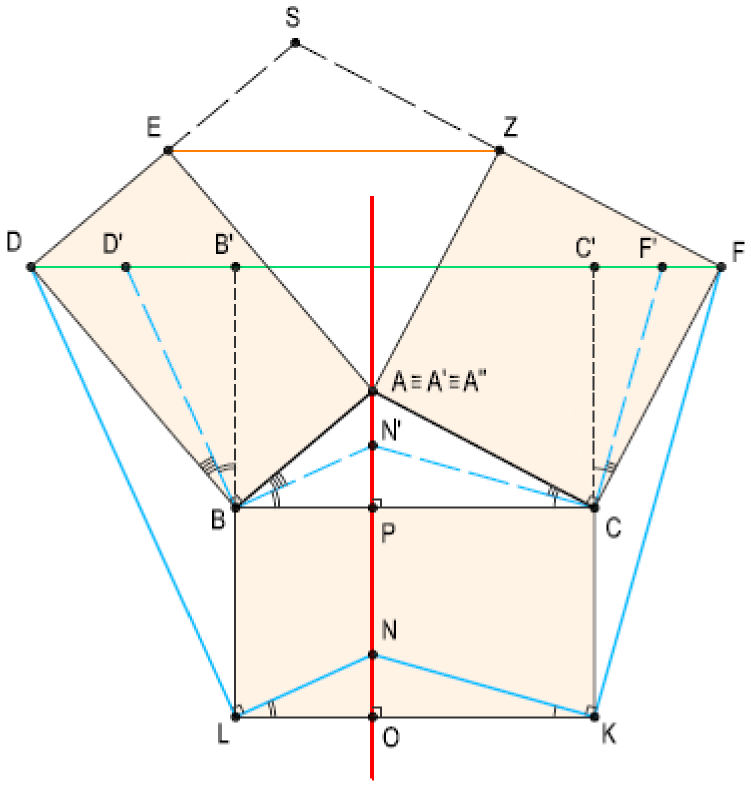
Πράγματι, τα σημεία $E \equiv AC' \cap NK$ και $Z \equiv AB' \cap NL$ και $S_\infty \equiv B'C' \cap LK$ ανήκουν στην ίδια ευθεία, με το S_∞ θεωρούμενο ως το κατά εκδοχήν σημείο τομής των $B'C' \parallel LK$ σε απειρη απόσταση.

Σύμφωνα με το **Θεώρημα Desarques** τώρα, τα τρίγωνα $\vartriangle AB'C'$, $\vartriangle NLK$ είναι προοπτικά και άρα, προκύπτει $AN \cap B'L \cap C'K \equiv P_\infty$ $\Rightarrow$ $AN \parallel B'L \parallel C'K$ (3)

Από (3) $\Rightarrow$ $AN \perp BC$ και επομένως, το σημείο N κείται επί της ευθείας του ύψους εκ της κορυφής A του δοσμένου τριγώνου $\vartriangle ABC$ και το ζητούμενο για το **Λήμμα 5** έχει αποδειχθεί.

ΛΗΜΜΑ 6

Με βάσεις τις πλευρές δοσμένου τριγώνου $\triangle ABC$ και προς το εξωτερικό μέρος αυτού, κατασκευάζουμε τα τυχόντα ορθογώνια παραλληλογραμμα $ABDE$, $ACFZ$, $BCKL$, ώστε να ισχύει, $EZ \parallel BC$. Αποδείξτε ότι το σημείο N, τομής των δια των σημείων K, L καθέτων ευθειών επί των KF, LD αντιστοίχως, κείται επί της ευθείας του ύψους εκ της κορυφής A του $\triangle ABC$.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Στο σχήμα με τα δεδομένα του προβλήματος, έστω το σημείο $S \equiv DE \cap FZ$.

Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα $\triangle SEZ$, $\triangle ABC$, είναι όμοια και άρα έχουμε $\dfrac{SE}{AB} = \dfrac{SZ}{AC}$ (1)

Από (1) και $AB \parallel= ED$, $AC \parallel= ZF$ $\Rightarrow$ $\dfrac{SE}{ED} = \dfrac{SZ}{ZF}$ $\Rightarrow$ $EZ \parallel DF$ (2)

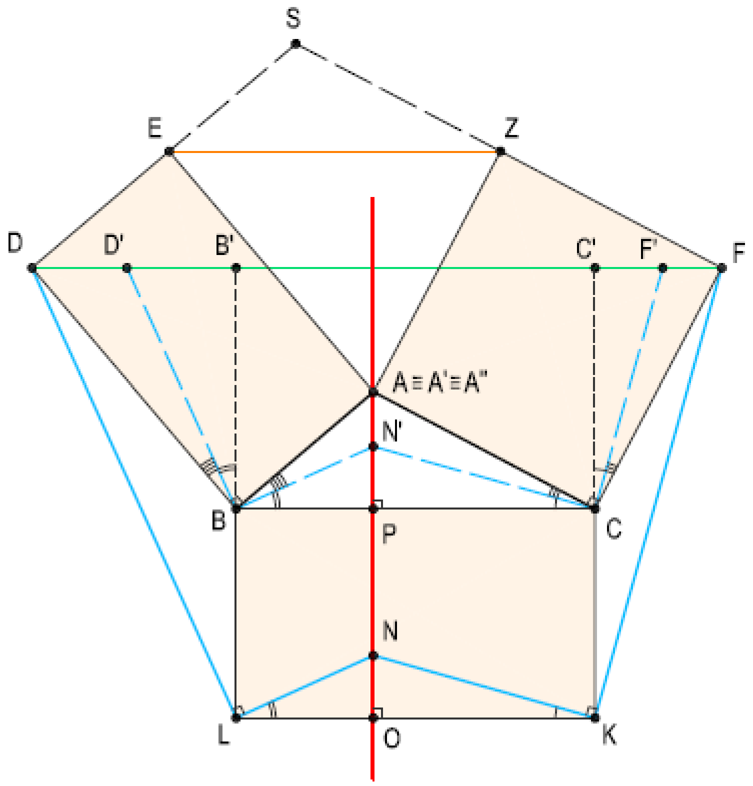
Όταν δηλαδή, τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα $ABDE$, $ACFZ$ είναι τέτοια ώστε να ισχύει $EZ \parallel BC$, ισχύει επίσης και $DF \parallel BC$.

Δια του σημείου N της εκφώνησης, φέρνουμε την κάθετη ευθεία επί την KL, κάθετη προφανώς και επί την BC, η οποία τις τέμνει στα σημεία έστω $Q \in KL$, $P \in BC$, αντιστοίχως και αρκεί να αποδειχθεί ότι η ευθεία PNQ περνάει από το σημείο A.

• Δια των σημείων B, C, φέρνουμε αντιστοίχως παράλληλες προς τις LD, KF και ας είναι D', F', τα σημεία τομής των με την ευθεία DF.

Έστω N', το σημείο τομής των δια των σημείων B, C, καθέτων ευθειών επί των BD', CF' αντιστοίχως και έχουμε ότι τα τρίγωνα $\triangle N'BC$, $\triangle NLK$ είναι ίσα γιατί έχουν $N'B \parallel NL$ και $N'C \parallel NK$ και $BC \parallel= LK$.

Από $N'B \parallel= NL$ και $N'C \parallel= NK$ τώρα, προκύπτει ότι τα $N'BLN$, $N'CKN$ είναι παραλληλόγραμμα και άρα, από $BL \parallel N'N \parallel CK \Rightarrow N'N \perp BC$ και επομένως το σημείο N' κείται επί της ευθείας PNQ.



• Έστω τα σημεία $A' \equiv N'N \cap AB$, $A'' \equiv N'N \cap AC$ και αρκεί να αποδειχθεί ότι $A' \equiv A''$.

Από $D'B \parallel DL \Rightarrow \dfrac{B'B}{BL} = \dfrac{B'D'}{D'D}$ (3) και από $F'C \parallel FK \Rightarrow \dfrac{C'C}{CK} = \dfrac{C'F'}{F'F}$ (4)

Από (3), (4) $\Rightarrow \dfrac{B'D'}{D'D} = \dfrac{C'F'}{F'F}$ (5) λόγω $B'B = C'C$ και $BL = CK$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle PBA'$, $\triangle B'BD$ είναι όμοια γιατί έχουν $\angle PBA' = \angle B'BD$ και οι BN', BD' είναι ομόλογες ευθείες τους, από $\angle PBN' = \angle B'BD'$ λόγω $BP \perp BB'$, $BN' \perp BD'$ και επομένως ισχύει $\dfrac{B'D'}{D'D} = \dfrac{PN'}{N'A'}$ (6) και ομοίως, αποδεικνύεται ότι $\dfrac{C'F'}{F'F} = \dfrac{PN'}{N'A''}$ (7) από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα $\triangle PCA''$, $\triangle C'CF$, τα οποία έχουν τις CN', CF', ως ομόλογες ευθείες τους.

Από (5), (6), (7) $\Rightarrow \dfrac{PN'}{N'A'} = \dfrac{PN'}{N'A''} \Rightarrow N'A' = N'A'' \Rightarrow A' \equiv A'' \Rightarrow A' \equiv A'' \equiv A$

Συμπεραίνεται έτσι, ότι η ευθεία $NN' \perp BC$ περνάει από το σημείο A και το ισοδύναμο ζητούμενο για το **Λήμμα 6** έχει αποδειχθεί.

ΟΡΘΟΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ – ΠΡΟΤΑΣΗ 2

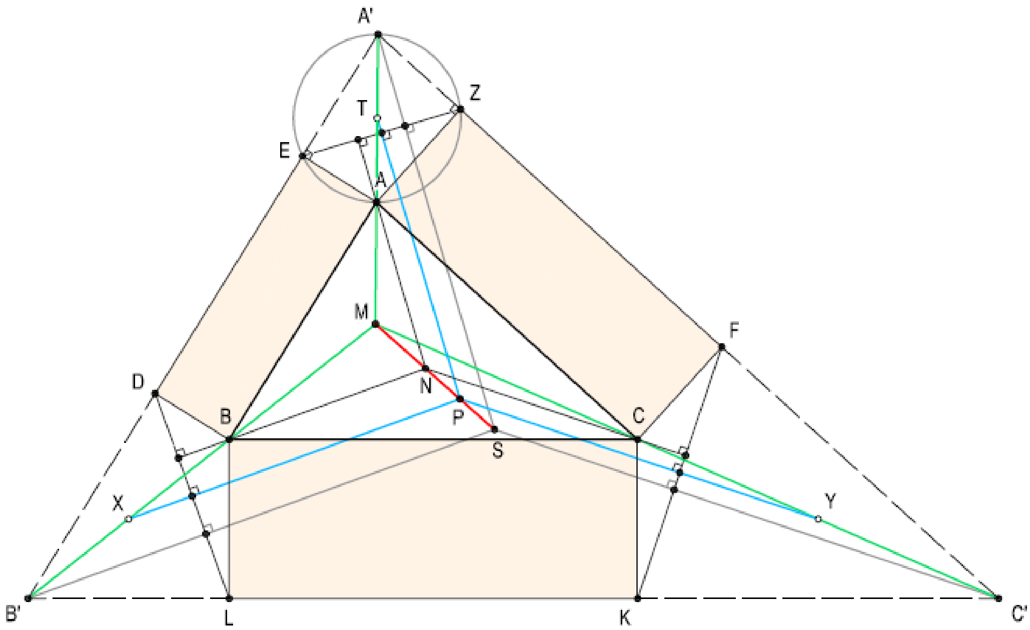
Με βάσεις τις πλευρές δοσμένου τριγώνου $\triangle ABC$ και προς το εξωτερικό μέρος αυτού, κατασκευάζουμε τα τυχόντα ορθογώνια παραλληλόγραμμα $ABDE$, $ACFZ$, $BCKL$ και έστω τα σημεία $A' \equiv DE \cap FZ$, $B' \equiv DE \cap KL$, $C' \equiv FZ \cap KL$. Αποδείξτε ότι:

α) Οι ευθείες AA', BB', CC', τέμνονται στο ίδιο σημείο, έστω το M.

β) Οι εκ των σημείων A', B', C', κάθετες ευθείες επί των EZ, DL, KF αντιστοίχως, τέμνονται στο ίδιο σημείο, έστω το S.

γ) Οι μεσοκάθετες ευθείες των τμημάτων EZ, DL, KF, τέμνονται στο ίδιο σημείο, έστω το P.

δ) Τα σημεία M, P, S, είναι συνευθειακά.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

• Έστω το σημείο $M \equiv AA' \cap BB'$ και αρκεί ως ισοδύναμο ζητούμενο, να αποδειχθεί ότι τα σημεία M, C, C', είναι συνευθειακά.

Τα τρίγωνα $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, έχουν τις πλευρές τους παράλληλες μία προς μία και άρα, είναι όμοια.

Προκύπτει επομένως, $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$ (1) και $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{MA}{MA'}$ (2) λόγω $AB \parallel A'B'$.

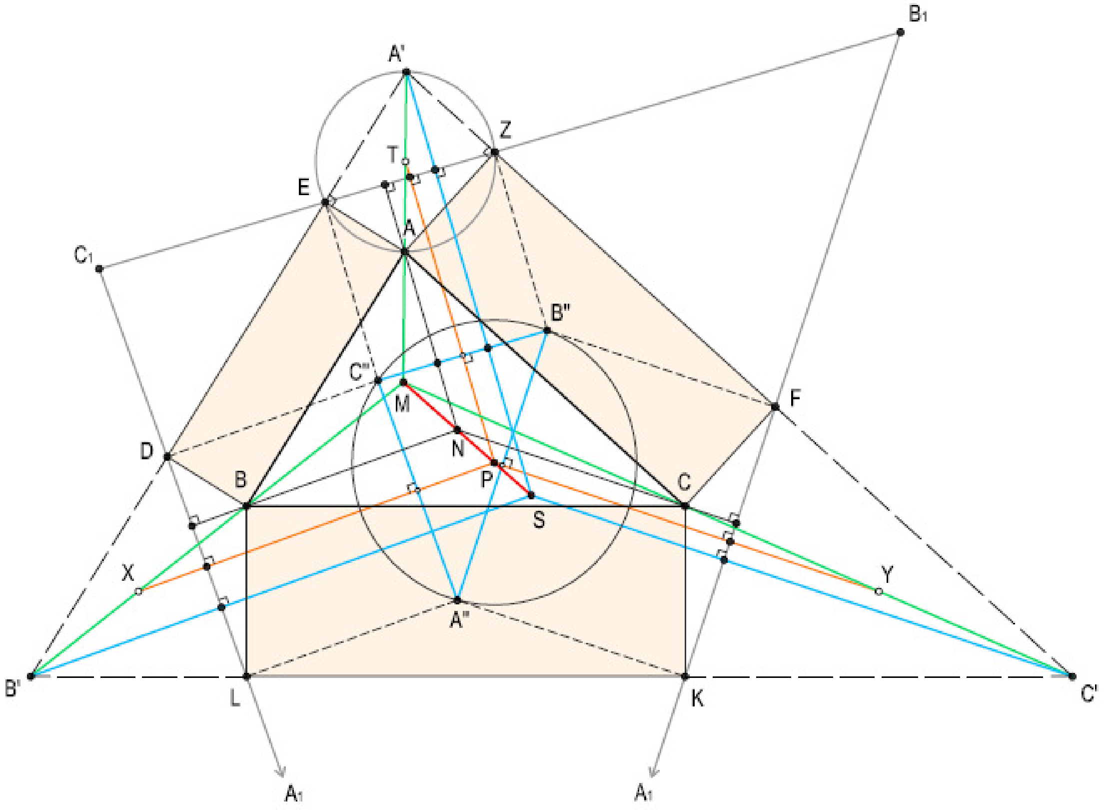
Από (1), (2) $\Rightarrow \dfrac{MA}{MA'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ (3) και άρα, σύμφωνα με το **Θεώρημα Θαλή**, συμπεραίνεται ότι τα σημεία M, C, C', είναι συνευθειακά και το ισοδύναμο για το **(α)** ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

• Έχει αποδειχθεί στα προηγούμενα (ΠΡΟΤΑΣΗ 1 – 2η Απόδειξη), ότι οι εκ των σημείων A, B, C, κάθετες ευθείες επί των EZ, DL, KF αντιστοίχως, τέμνονται στο ίδιο σημείο, έστω το N.

Έστω S, το σημείο τομής της ευθείας MN, από την δια του A' κα΄θετη ευθεία επί την EZ.

Από $A'S \parallel AN \Rightarrow \dfrac{MN}{MS} = \dfrac{MA}{MA'}$ (4) και $\dfrac{MA}{MA'} = \dfrac{MB}{MB'} = \dfrac{MC}{MC'}$ λόγω $M \equiv AA' \cap BB' \cap CC'$,

προκύπτουν $B'S \parallel BN$, $C'S \parallel CN$, οπότε $B'S \perp DL$, $C'S \perp KF$ και το **(β)** ζητούμενο έχει αποδειχθεί.



- Το τετράπλευρο $EAZA'$ είναι εγγράψιμο γιατί έχει $\angle AEA' = 90° = \angle AZA'$ και επομένως, η μεσοκάθετη ευθεία του τμήματος EZ, περνάει από το σημείο T, κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου περί το $EAZA'$, το οποίο ταυτίζεται με το μέσον του AA', κοινής υποτείνουσας των ορθογωνίων τριγώνων, $\triangle EAA'$, $\triangle ZAA'$.

Αποδεικνύεται δηλαδή, ότι η μεσοκάθετη ευθεία του EZ, είναι μεσοπαράλληλη των $AN \parallel A'S$ και επομένως, τέμνει την ευθεία MNS, στο σταθερό σημείο αυτής P, μέσον του τμήματος NS.

Αποδεικνύεται ομοίως, ότι και οι μεσοκάθετες ευθείες των DL, KF, περνάνε από το ως άνω σταθερό σημείο P και τα **(γ)**, **(δ)** ζητούμενα έχουν αποδειχθεί.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

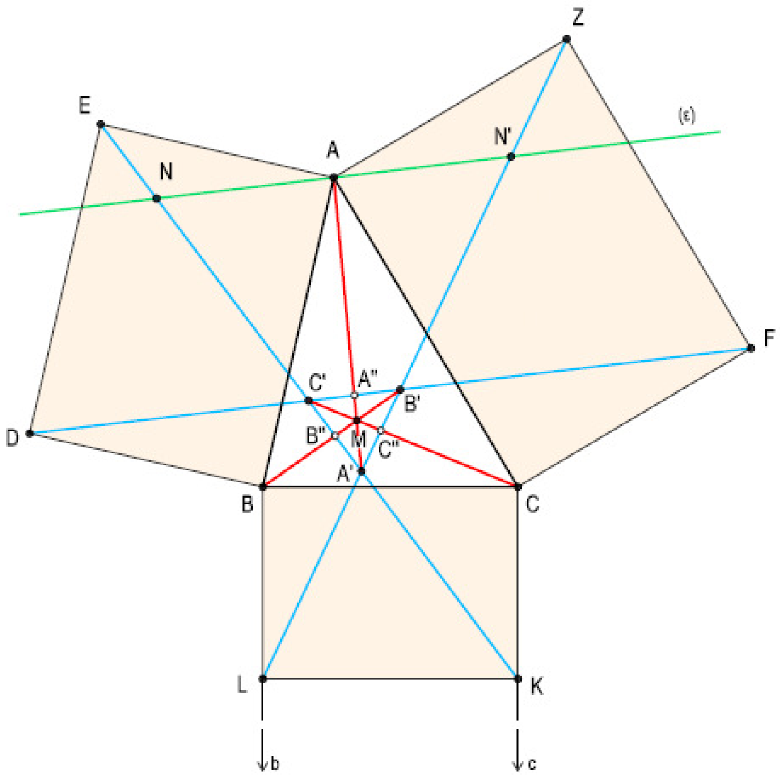
Εάν A'', είναι το σημείο τομής των δια των σημείων K, L, καθέτων ευθειών επί των KF, LD αντιστοίχως και ομοίως οριστούν τα σημεία B'', C'', με βάση τα όσα έχουν αποδειχθεί στα προηγούμενα (ΠΡΟΤΑΣΗ 1 – 2 η Απόδειξη), συμπεραίνεται ότι οι μεσοκάθετες ευθείες των EZ, DL, KF, είναι και μεσοκάθετες των πλευρών του τριγώνου $\triangle A''B''C''$ και άρα, το ως άνω σημείο P ταυτίζεται με το περίκεντρο αυτού του τριγώνου.

Έστω τα σημεία $A_1 \equiv DL \cap KF$, $B_1 \equiv EZ \cap KF$, $C_1 \equiv LD \cap EZ$ και παρατηρούμε ότι τα σημεία N, S, είναι τα Ορθοπολικά σημεία των τριγώνων $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ αντιστοίχως, ως προς το τρίγωνο $A_1B_1C_1$ και όπως έχει ήδη αποδειχθεί με τα παραπάνω, η ευθεία που τα συνδέει περνάει από το περίκεντρο του τριγώνου $\triangle A''B''C''$.

Με παρόμοιο τρόπο, αποδεικνύεται ότι η ευθεία που συνδέει τα Ορθοπολικά σημεία των τριγώνων $\triangle A''B''C''$, $\triangle A_1B_1C_1$ ως προς το τρίγωνο $\triangle A'B'C'$, περνάει από το περίκεντρο του τριγώνου $\triangle ABC$.

ΟΡΘΟΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ – ΠΡΟΤΑΣΗ 3

Με βάσεις τις πλευρές δοσμένου τριγώνου $\vartriangle ABC$ και προς το εξωτερικό μέρος αυτού, κατασκευάζουμε τα όμοια ορθογώνια παραλληλόγραμμα $ABDE$, $ACFZ$, $BCKL$ και έστω τα σημεία $A' \equiv EK \cap ZL$, $B' \equiv ZL \cap DF$, $C' \equiv DF \cap EK$. Αποδείξτε ότι το σημείο έστω M, στο οποίο συντρέχουν οι ευθείες AA', BB', CC', σύμφωνα με την ΠΡΟΤΑΣΗ 1, ταυτίζεται με το βαρύκεντρο του τριγώνου $\vartriangle A'B'C'$.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω τα σημεία $A'' \equiv B'C' \cap AA'$, $B'' \equiv A'C' \cap BB'$, $C'' \equiv A'B' \cap CC'$ και αρκεί να αποδειχθεί ότι τα σημεία αυτά ταυτίζονται με τα μέσα των πλευρών του τριγώνου $\vartriangle A'B'C'$.

Δια της κορυφής A του δοσμένου τριγώνου $\vartriangle ABC$, φέρνουμε την παράλληλη ευθεία (ε) προς την DF και έστω N, N', τα σημεία τομής της από τις ευθείες EK, ZL, αντιστοίχως.

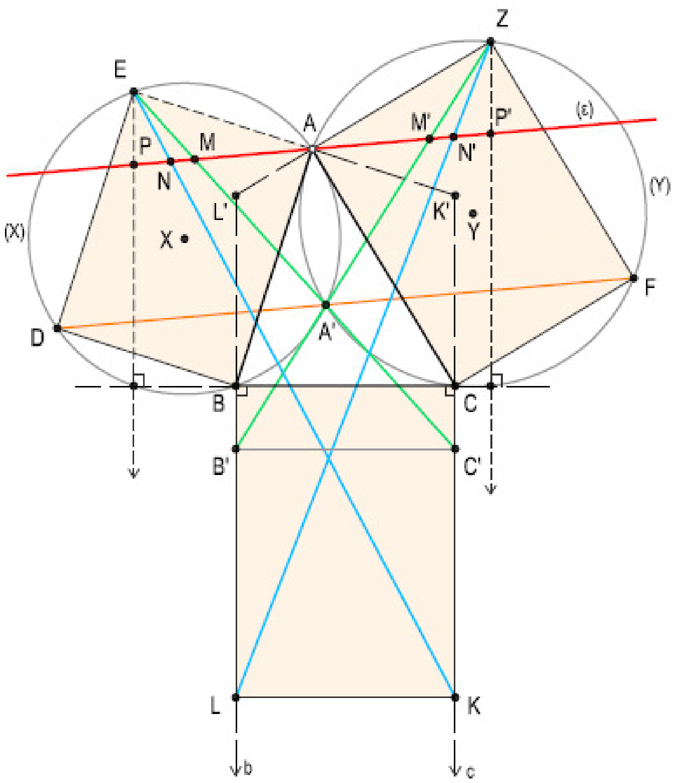
Αποδεικνύεται παρακάτω (**Λήμμα 7**), ότι εάν θεωρηθούν σταθερά τα παραλληλόγραμμα $ABDE$, $ACFZ$ και το τμήμα $KL \parallel BC$ ολισθαίνει επί των ημιευθειών Bb, Cc, καθέτων επί την BC, τα ως άνω σημεία $N \equiv (\varepsilon) \cap EK$, $N' \equiv (\varepsilon) \cap ZL$, είναι πάντοτε συμμετρικά , ως προς το σημείο A.

Από $AN = AN'$ και $NN' \parallel B'C'$ $\Rightarrow$ $A''B' = A''C'$ και άρα, το A'' ταυτίζεται με το μέσον του $B'C'$.

Ομοίως, αποδεικνύεται ότι και τα σημεία B'', C'', ταυτίζονται με τα μέσα των $A'C'$, $A'B'$ αντιστοίχως και επομένως το σημείο $M \equiv AA' \cap BB' \cap CC'$ ταυτίζεται με το βαρύκεντρο του τριγώνου $\vartriangle A'B'C'$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΛΗΜΜΑ 7

Επί των πλευρών AB, AC, δοσμένου τριγώνου $\triangle ABC$ και προς το εξωτερικό μέρος αυτού, κατασκευάζουμε τα όμοια ορθογώνια παραλληλόγραμμα $ABDE$, $ACFZ$, αντιστοίχως. Δια των σημείων B, C, φέρνουμε τις ημιευθείες Bb, Cc, κάθετες επί την BC και ορίζουμε επί αυτών τα μεταβλητά σημεία L, K αντιστοίχως, ώστε να είναι $LK \parallel BC$. Τέλος, δια της κορυφής A, φέρνουμε την ευθεία (ε) παράλληλη προς την DF, η οποία τέμνει τις ευθείες EK, ZL στα σημεία N, N', αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι $AN = AN'$.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τους κύκλους (X), (Y), τους περιγεγραμμένους περί τα $ABDE$, $ACFZ$ αντιστοίχως και έστω A', το δεύτερο κοινό σημείο τομής των.

Εστω τα σημεία $M \equiv (\varepsilon) \cap EA'$, $M' \equiv (\varepsilon) \cap ZA'$ και $B' \equiv Bb \cap ZA'$, $C' \equiv Cc \cap EA'$.

Δια των σημείων E, Z, φέρνουμε τις κάθετες ευθείες επί την ευθεία BC και έστω P, P', τα σημεία στα οποία τέμνουν αντιστοίχως την ευθεία (ε).

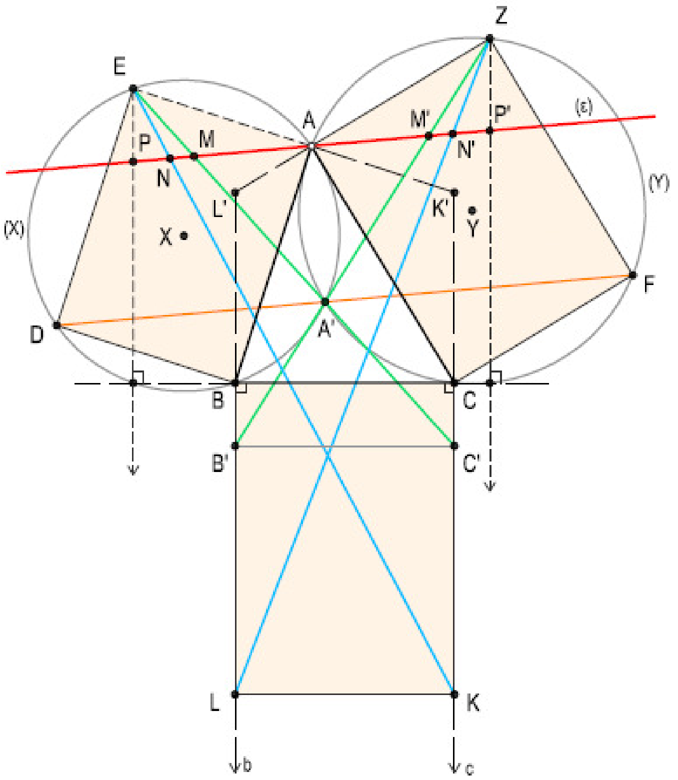
- Αποδεικνύεται παρακάτω (**Λήμμα 8**), ότι $\boxed{BB' = CC'}$ (1) και ότι τα σημεία M, M', είναι συμμετρικά ως προς το σημείο A και άρα έχουμε $\boxed{AM = AM'}$ (2)

Αποδεικνύεται επίσης (**Λήμμα 9**) ότι και τα σημεία P, P′, είναι συμμετρικά ως προς το σημείο A και επομένως, ισχύει $\boxed{AP = AP'}$ (3)

Έστω K', L', τα σημεία τομής των προεκτάσεων των Cc, Bb αντιστοίχως, προς το μερος του A.

Είδαμε στα προηγούμενα (**Λήμμα 5**), ότι ισχύει $\boxed{BL' = CK'}$ (4)

Επίσης, εκ κατασκευής έχουμε $KL \parallel = BC$ και άρα έχουμε $\boxed{BL = CK}$ (5)



• Παρατηρούμε ότι η δέσμη $E.AMNP$, τέμνεται από την ευθεία (ε) στα σημεία A, M, N, P και από την ευθεία $Cc \parallel EP$, στα σημεία K', C', K και ομοίως, η δέσμη $Z.AM'N'P'$, τέμνεται από την (ε) στα σημεία A, M', N', P', και από την $Bb \parallel ZP'$, στα σημεία L', B', L.

Σύμφωνα με το παρακάτω **Λήμμα 10**, προκύπτουν οι ισότητες των Διπλών και Απλών λόγων:

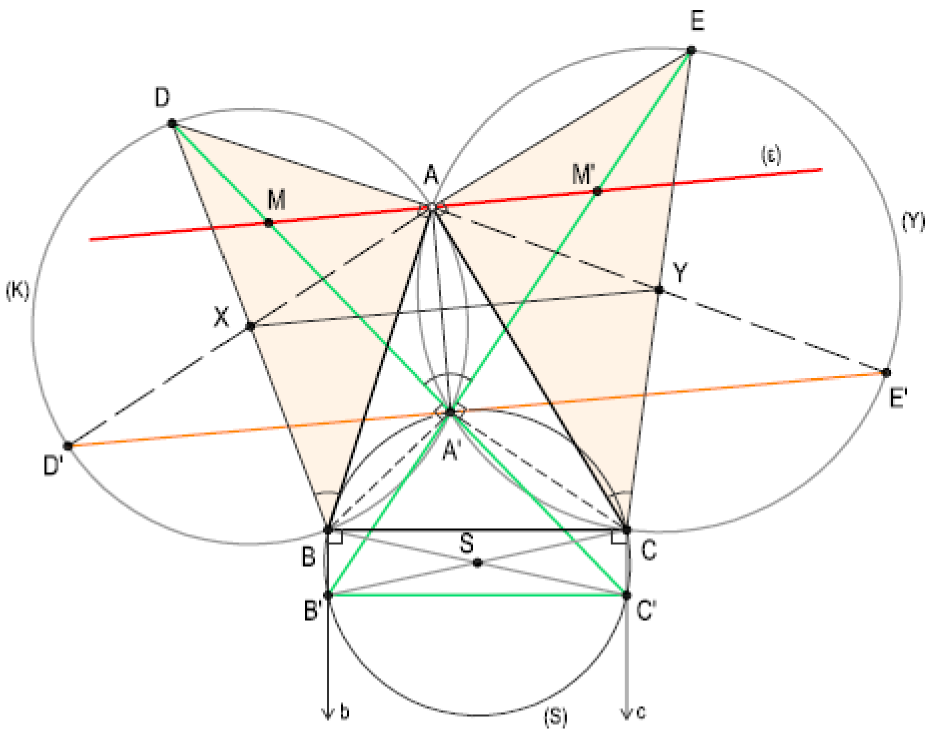
$$\boxed{(A,M,N,P)=(K',C',K)} \quad (6) \text{ και } \boxed{(A,M',N',P')=(L',B',L)} \quad (7)$$

Αλλά από (1), (4), (5) $\Rightarrow$ $\boxed{(K',C',K)=(L',B',L)}$ (8) οπότε $\boxed{(A,M,N,P)=(A,M',N',P')}$ (9)

Τέλος, από (2), (3), (9) $\Rightarrow$ $\boxed{AN=AN'}$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΛΗΜΜΑ 8

Επί των πλευρών $AB, AC,$ δοσμένου τριγώνου $\triangle ABC$ και προς το εξωτερικό μέρος αυτού, κατασκευάζουμε τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα $\triangle ABD, \triangle ACE,$ με $\angle BAD = 90^\circ = \angle CAE$ και $\angle ABD = \angle ACE$ και έστω $A',$ το δεύτερο κοινό σημείο τομής των περικύκλων τους $(X), (Y).$ Δια του σημείου A φέρνουμε την ευθεία $(\varepsilon),$ παράλληλη προς την ευθεία που συνδέει τα μέσα των BD, CE και δια των σημείων $B, C,$ τις ημιευθείες $Bb, Cc,$ κάθετες επί την $BC.$ Οι ευθείες $DA', EA',$ τέμνουν αντιστοίχως την ευθεία (ε) στα σημεία έστω M, M' και τις ημιευθείες $Cc, Bb,$ στα σημεία $C', B'.$ Αποδείξτε ότι $AM = AM'$ και $BB' = CC'.$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Από τα εγγράψιμα τετράπλευρα $AA'BD, AA'CE,$ έχουμε $\angle AA'D = \angle ABD = \angle ACE = \angle AA'E$ (1) και άρα, η AA' είναι διχοτόμος στο τρίγωνο $\triangle A'MM$ και επειδή ισχύει $A'A \perp MM',$ λόγω $MM' \parallel XY$ και $AA' \perp XY,$ προκύπτει ότι το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές , και επομένως ισχύει $AM = AM'.$

- Τα σημεία $B, D,$ είναι αντιδιαμετρικά στον κύκλο (X) και άρα $\angle BA'D = \angle BAD = 90^\circ$ (2)

  Από (2) και $\angle BCC' = 90^\circ$ προκύπτει ότι τοτετράπλευρο $BA'CC'$ είναι εγγράψιμο και επομένως, το σημείο C' ανήκει στο περίκυκλο έστω $(S),$ του τριγώνου $A'BC.$

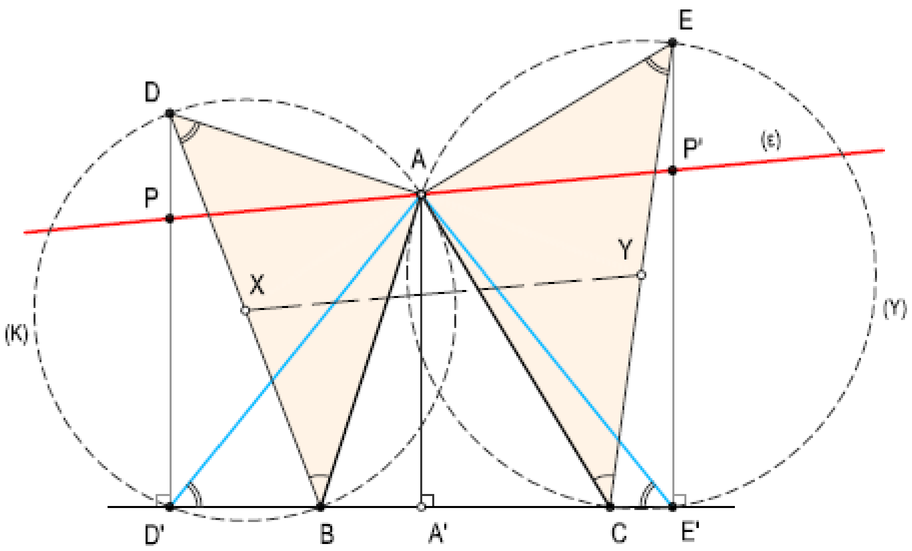
  Ομοίως αποδεικνύεται ότι και το σημείο $B' \equiv Bb \cap EA'$ ανήκει επίσης στον κύκλο (S) και από $BB' \perp BC,$ $CC' \perp BC,$ έχουμε ότι το $BCC'B'$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Συμπεράνεται έτσι, ότι $BB' = CC'$ και το **Λήμμα 8** έχει αποδειχθεί.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Εάν $D', E',$ είναι αντιστοίχως τα αντιδιαμετρικά του A στους κύκλους $(X), (Y),$ αποδεικνύεται εύκολα ότι τα σημεία D', A', E' είναι συνευθειακά και ισχύει $D'E' \parallel XY \parallel (\varepsilon).$

ΛΗΜΜΑ 9

Επί των πλευρών $AB, AC,$ δοσμένου τριγώνου $\vartriangle ABC$ και προς το εξωτερικό μέρος αυτού, κατασκευάζουμε τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα $\vartriangle ABD, \vartriangle ACE,$ με $\angle BAD = 90^\circ = \angle CAE$ και $\angle ABD = \angle ACE$ και έστω $D', E',$ οι προβολές των σημείων D, E επί την ευθεία $BC,$ αντιστοίχως. Δια του σημείου A φέρνουμε την ευθεία $(\varepsilon),$ παράλληλη προς την ευθεία που συνδέει τα μέσα των BD, CE και έστω $P, P',$ τα σημεία στα οποία τέμνει τις ευθείες $DD', EE',$ αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι $AP = AP'.$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Θεωρούμε τους κύκλους $(X), (Y),$ περίκυκλους των τριγώνων $\vartriangle ABD, \vartriangle ACE,$ αντιστοίχως.

Στον κύκλο $(X),$ τα σημεία $B, D,$ είναι αντιδιαμετρικά και από $DD' \perp BC,$ προκύπτει ότι το σημείο D' ανήκει στον (X) και άρα έχουμε $\angle AD'B = \angle ADB$ (1)

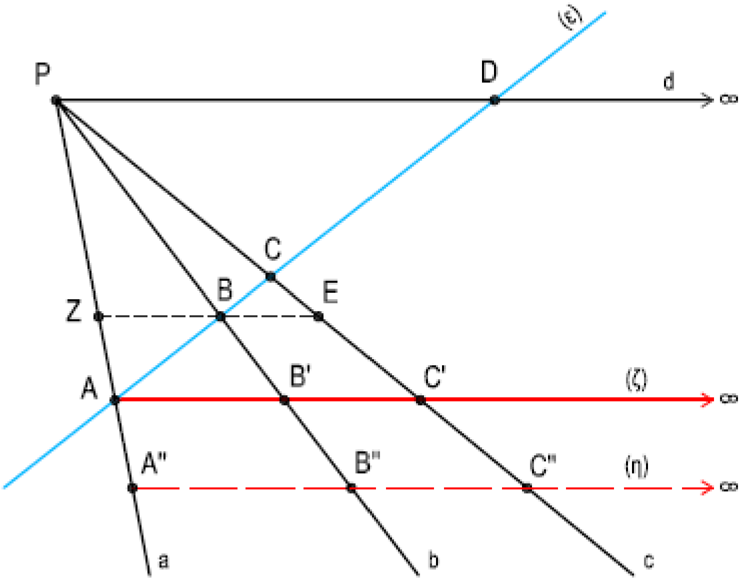
Ομοίως αποδεικνύεται ότι το E' ανήκει στον κύκλο (Y) και άρα $\angle AE'C = \angle AEC$ (2)

Από (1), (2) και $\angle ADB = \angle AEC \Rightarrow \angle AD'B = \angle AE'C$ και επομένως, το τρίγωνο $\vartriangle AD'E'$ είναι ισοσκελές και άρα, το σημείο $A',$ προβολή του A επί την $BC,$ ταυτίζεται με το μέσον του $D'E'.$

Αποδεικνύεται έτσι, ότι στο ορθογώνιο τραπέζιο $PD'E'P',$ η ευθεία AA' είναι μεσοπαράλληλη των βάσεών του $PD', P'E'$ και άρα, το σημείο A ταυτίζεται με το μέσον του τμήματος PP' και το **Λήμμα 9** έχει αποδειχθεί.

ΛΗΜΜΑ 10

Ευθεία (ε) τέμνει τις ακτίνες Pa, Pb, Pc, Pd δοσμένης δέσμης $P.abcd$, στα σημεία A, B, C, D, αντιστοίχως. Δια του σημείου A φέρνουμε την ευθεία (ζ), παράλληλη προς την ακτίνα Pd και έστω τα σημεία $B' \equiv Pb \cap (\zeta)$ και $C' \equiv Pc \cap (\zeta)$. Αποδείξτε ότι $(A,B,C,D)=(A,B',C')$.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ως γνωστό ισχύει $(A,B,C,D)=\dfrac{CA}{CB}\div\dfrac{DA}{DB}$ (1)

Από $(\zeta)\,||\,Pd \;\Rightarrow\; \triangle ACC' \approx \triangle PCD \;\Rightarrow\; \dfrac{CA}{CD}=\dfrac{C'A}{DP} \;\Rightarrow\; CA=CD\cdot\dfrac{C'A}{DP}$ (2) και ομοίως:

$\dfrac{CB}{CD}=\dfrac{EB}{DP}\Rightarrow CB=CD\cdot\dfrac{EB}{DP}$ (3) $\dfrac{DA}{BA}=\dfrac{DP}{BZ}\Rightarrow DA=BA\cdot\dfrac{DP}{BZ}$ (4) $\dfrac{DB}{BA}=\dfrac{DP}{B'A}\Rightarrow DB=BA\cdot\dfrac{DP}{B'A}$ (5)

Από (1), (2), (3), (4), (5) $\Rightarrow$ $(A,B,C,D)=\dfrac{C'A}{EB}\div\dfrac{B'A}{BZ}=\dfrac{C'A}{B'A}\cdot\dfrac{BZ}{EB}$ (6)

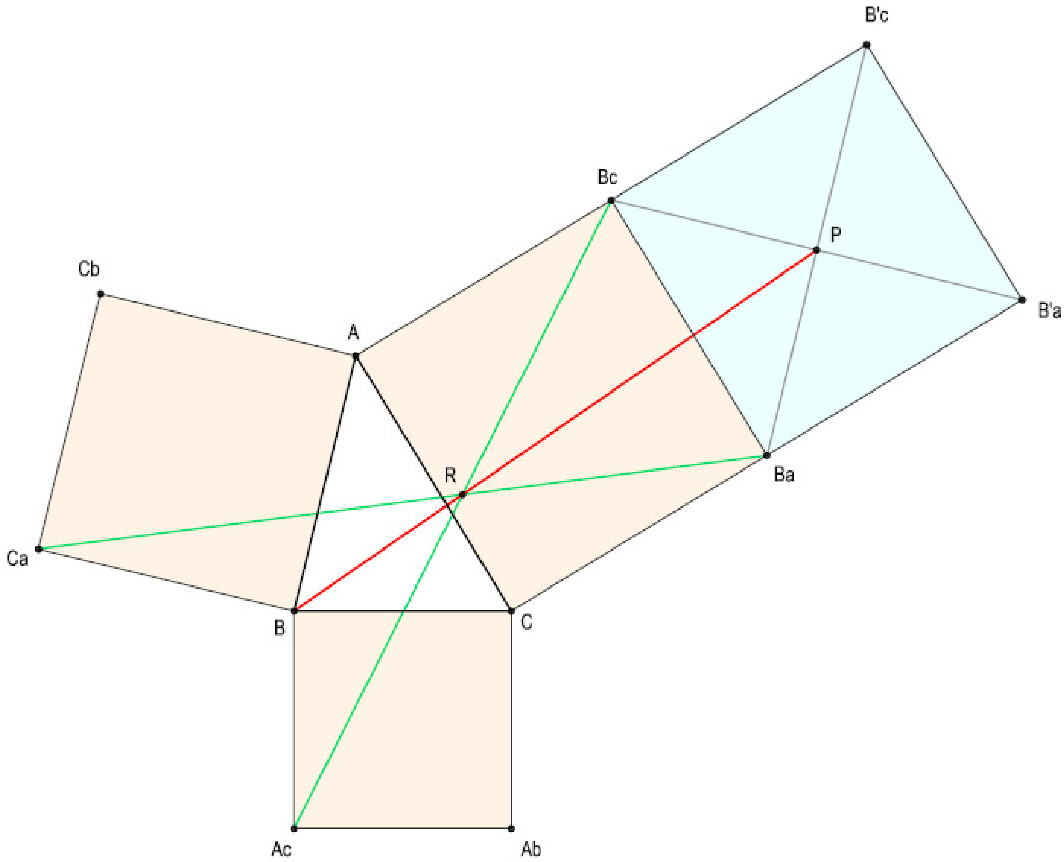
Από (6) και $\dfrac{BZ}{EB}=\dfrac{B'A}{C'B'} \Rightarrow (A,B,C,D)=\dfrac{C'A}{C'B'}=(A,B',C')$ (7) και το **Λήμμα 10** έχει αποδειχθεί.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Εάν A'', B'', C'', είναι τα σημεία τομής των Pa, Pb, Pc αντιστοίχως, από τυχούσα ευθεία (η) παράλληλη προς την Pd, ισχύει προφανώς $(A'',B'',C'')=(A,B',C')$ και άρα, για οποιαδήποτε θέση της $(\eta)\,||\,Pd$ αποδεικνύεται ότι $(A,B,C,D)=(A'',B'',C'')$.

ΟΡΘΟΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ – ΠΡΟΤΑΣΗ 4 (Omid Hatami – ΙΡΑΝ)

Δίνεται τρίγωνο $\triangle ABC$. Τετράγωνα AB_cB_aC, CA_bA_cB και BC_aC_bA κατασκευάζονται προς το εξωτερικό μέρος του $\triangle ABC$. Τετράγωνο $B_cB'_cB'_aB_a$ με κέντρο το σημείο P, κατασκευάζεται προς το εξωτερικό μέρος του AB_cB_aC. Αποδείξτε ότι οι ευθείες BP, C_aB_a και A_cB_c τέμνονται στο ίδιο σημείο.



Η πρόταση αυτή με την ως άνω εκφώνηση, πρωτοδημοσιεύτηκε στο φόρουμ **AoPS**, τον Αύγουστο του 2007 και όπως αναφέρεται, ήταν πρόβλημα της Εθνικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας (3ος Γύρος) του ΙΡΑΝ, το ίδιο έτος.

https://artofproblemsolving.com/community/c6h164548_concurrent_lines

Η απόδειξη που ακολουθεί στα επόμενα, αφορά στην επέκταση της πρότασης με όμοια ορθογώνια παραλληλόγραμμα αντί τετραγώνων στο σχήμα, και δημοσιεύτηκε τότε στο ίδιο φόρουμ.

Όμως, η γενίκευση εμφανίστηκε αργότερα (Αύγουστος του 2017), επίσης στο φόρουμ **AoPS**, δημοσιευμένη από τον (ψευδώνυμο) **dungnguentien**, από το Βιετνάμ. (;)

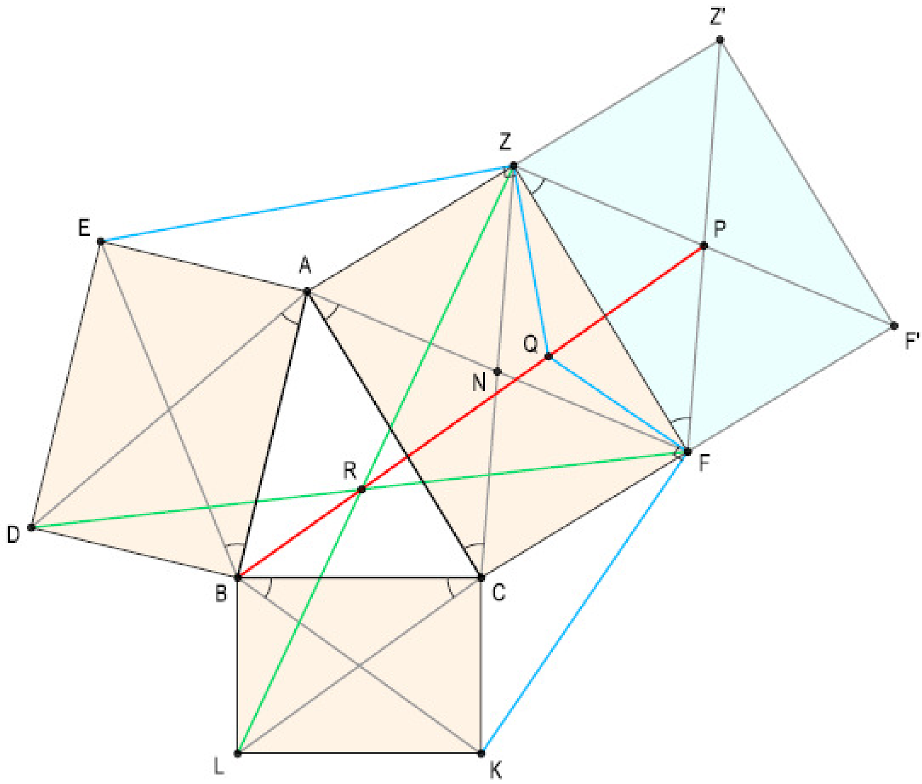
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1505582_concurrency_with_similar_rectangles

Στην ιστοσελίδα του **Jean-Louis Ayme**, υπάρχει εκτεταμένο άρθρο που αφορά σε προβλήματα σχετικά με το βασικό σχήμα και τις επεκτάσεις του, στην **Γεωμετρία Vecten**.

http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/Docs/La%20figure%20de%20Vecten.pdf

ΟΡΘΟΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ – ΠΡΟΤΑΣΗ 4 - ΕΠΕΚΤΑΣΗ

Με βάσεις τις πλευρές δοσμένου τριγώνου $\triangle ABC$ και προς το εξωτερικό μέρος αυτού, κατασκευάζουμε τα όμοια ορθογώνια παραλληλόγραμμα $ABDE$, $ACFZ$, $BCKL$ και ας είναι $FZZ'F'$, το όμοιο με τα προηγούμενα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο επί της FZ. Αποδείξτε ότι οι ευθείες DF, ZL, BP τέμνονται στο ίδιο σημείο, όπου $P \equiv FZ' \cap ZF'$.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

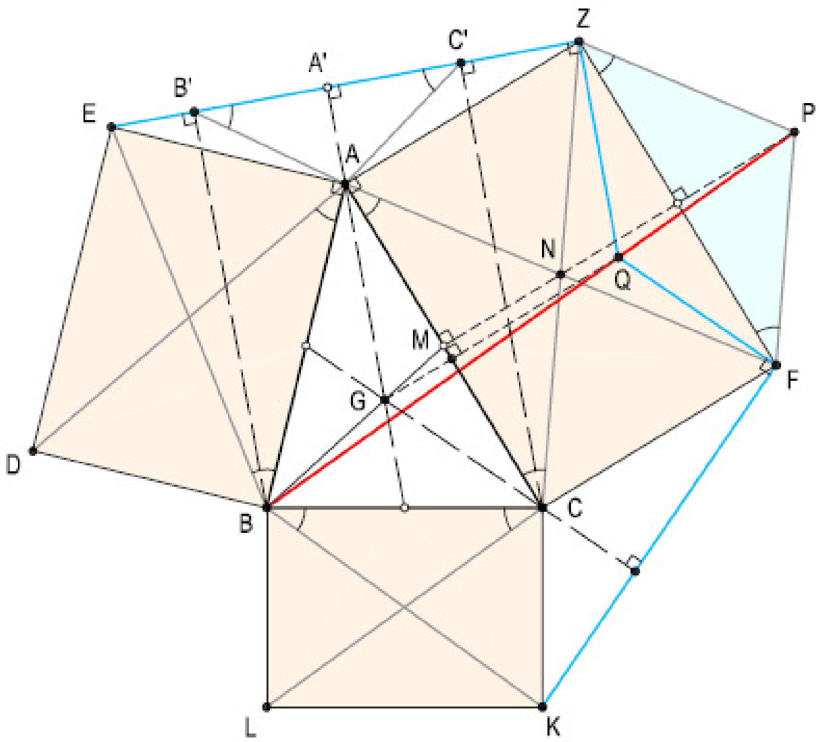
Έστω Q, το σημείο τομής των δια των σημείων F, Z, καθέτων ευθειών επί των KF, EZ αντιστοίχως και έχει αποδειχθεί στα προηγούμενα (ΠΡΟΤΑΣΗ 1 – 2η ΑΠΟΔΕΙΞΗ – **Λήμμα 4**), ότι το σημείο έστω $R \equiv DF \cap ZL$, ανήκει στην ευθεία BQ.

Σύμφωνα με το παρακάτω **Λήμμα 11**, αποδεικνύεται ότι τα σημεία B, Q, P, είναι συνευθειακά.

Συμπεραίνεται έτσι, ότι οι ευθείες BRQ, BQP ταυτίζονται γιατί έχουν δύο κοινά σημεία και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΛΗΜΜΑ 11

Με βάσεις τις πλευρές δοσμένου τριγώνου $\triangle ABC$ και προς το εξωτερικό μέρος αυτού, κατασκευάζουμε τα όμοια ορθογώνια παραλληλόγραμμα $ABDE$, $ACFZ$, $BCKL$ και ας είναι P, το συμμετρικό σημείο του N ως προς την ευθεία FZ, όπου $N \equiv AF \cap CZ$. Δια των σημείων F, Z, φέρνουμε τις κάθετες ευθείες επί των KF, EZ αντιστοίχως και έστω Q, το σημείο τομής τους. Αποδείξτε ότι τα σημεία B, Q, P, είναι συνευθειακά.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω A', B', C', οι προβολές των σημείων A, B, C επί της ευθείας EZ, αντιστοίχως.

Από τα εγγράψιμα τετράπλευρα $ABEB'$, $ACZC'$, έχουμε $\angle AB'C' = \angle ABE = \angle ACZ = \angle AC'B'$ (1)

Από (1) προκύπτει ότι το τρίγωνο $\triangle AB'C'$ είναι ισοσκελές και επομένως το σημείο A' ταυτίζεται με το μέσον του $B'C'$.

Η ευθεία $AA' \perp B'C' \equiv EZ$ τώρα, ως η μεσοπαράλληλη των βάσεων στο ορθογώνιο τραπέζιο $BB'C'C$, περνάει από το μέσον της πλευράς BC και άρα, ταυτίζεται με την A-διάμεσο του $\triangle ABC$.

Ομοίως, η δια του σημείου C κάθετη ευθεία επί την KF, ταυτίζεται με την C-διάμεσό του.

• Έστω M, το μέσον της πλευράς AC και έχουμε ότι τα σημεία M, N, P, είναι συνευθειακά και προφανώς ισχύει $AZ = \dfrac{2MP}{3}$ (2)

Τα τρίγωνα $\triangle AGC$, $\triangle ZQF$, με G το βαρύκεντρο του $\triangle ABC$, είναι ίσα γιατί έχουν $AG \parallel ZQ$ και $GC \parallel QF$ και $AC \parallel= ZF$.

Από την ισότητα των ως άνω τριγώνων και τις παράλληλες πλευρές τους, προκύπτει $AG \parallel= ZQ$ και επομένως, το $AGQZ$ είναι παραλληλόγραμμο και άρα, ισχύει $GQ = AZ$ (3)

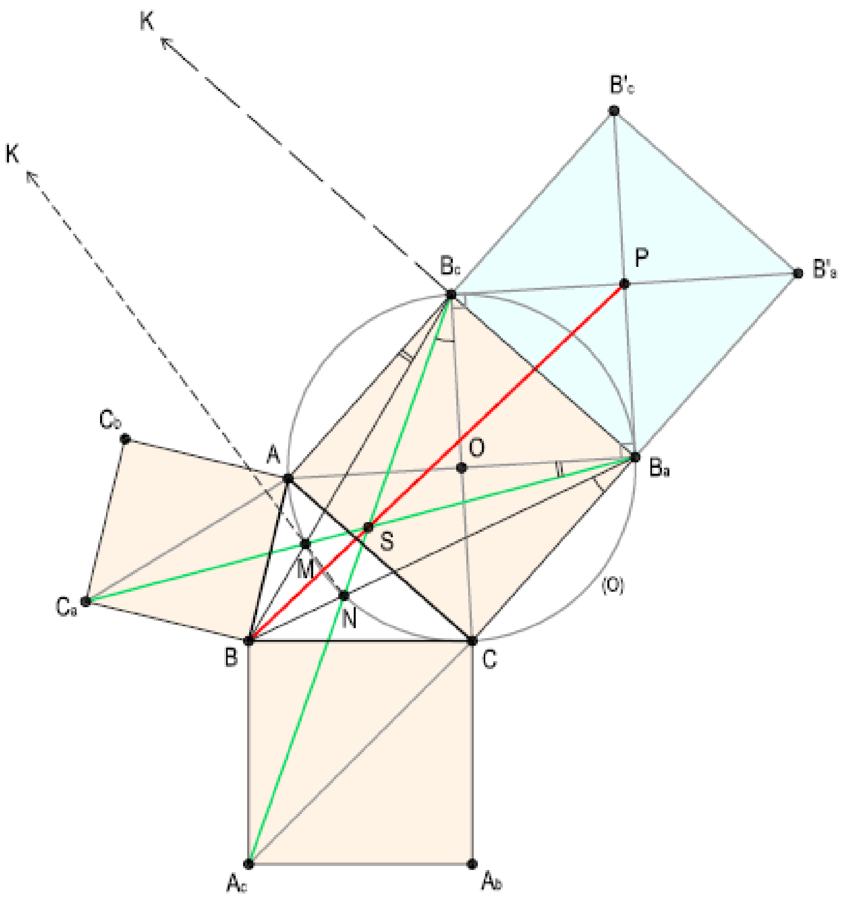
Από (2), (3) $\Rightarrow$ $GQ = \dfrac{2MP}{3}$ (4)

Από (4) και $BG = \dfrac{2BM}{3}$ και $GQ \parallel AZ \parallel MP$, σύμφωνα με το **Θεώρημα Θαλή**, συμπεραίνεται ότι τα σημεία B, N, P, είναι συνευθειακά και το **Λήμμα 11** έχει αποδειχθεί.

- Ακολουθεί στα επόμενα η απόδειξη που υπάρχει στον παραπάνω σύνδεσμο του **AoPS**, για το αρχικό πρόβλημα με τα τετράγωνα επί των πλευρών του δοσμένου τριγώνου $\vartriangle ABC$, δημοσιευμένη από τον (μαθητή Λυκείου τότε) **Son Hong Ta** από το Βιετνάμ, που υπογράφει με το ψευδώνυμο **April**.

ΟΡΘΟΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ – ΠΡΟΤΑΣΗ 4 (Omid Hatami – ΙΡΑΝ)

Δίνεται τρίγωνο $\vartriangle ABC$. Τετράγωνα AB_cB_aC, CA_bA_cB και BC_aC_bA κατασκευάζονται προς το εξωτερικό μέρος του $\vartriangle ABC$. Τετράγωνο $B_cB'_cB'_aB_a$ με κέντρο το σημείο P, κατασκευάζεται προς το εξωτερικό μέρος του AB_cB_aC. Αποδείξτε ότι οι ευθείες BP, C_aB_a και A_cB_c τέμνονται στο ίδιο σημείο.



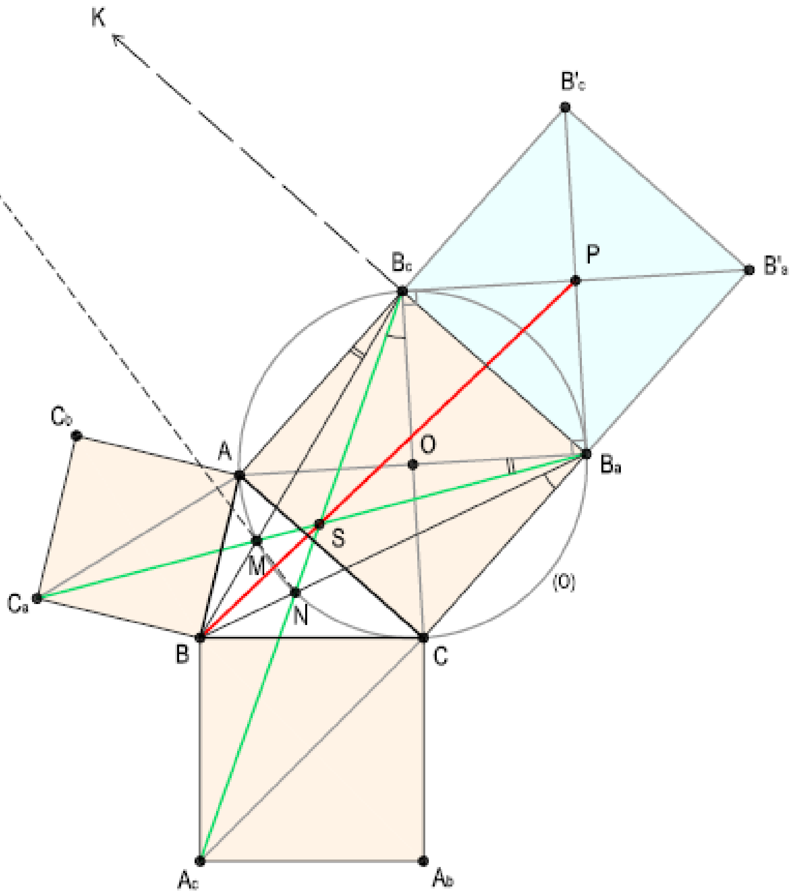
ΑΠΟΔΕΙΞΗ (Son Hong Ta – Βιετνάμ)

Έστω τα σημεία $M \equiv C_aB_a \cap BB_c$ και $N \equiv A_cB_c \cap BB_a$.

Τα τρίγωνα $\vartriangle ABB_c$, $\vartriangle AC_aB_a$ είναι όμοια γιατί έχουν $\angle BAB_c = \angle C_aAB_a$ και $\dfrac{AB}{AB_c} = \dfrac{AC_a}{AB_a}$

Από την ομοιότητα των ως άνω τριγώνων, προκύπτει $\angle AB_cM = \angle AB_aM$ και επομένως, το τετράπλευρο AMB_aB_c είναι εγγράψιμο και άρα, το σημείο M ανήκει στον περίκυκλο έστω (O) του τριγώνου $\vartriangle AB_aB_c$ ο οποίος ταυτίζεται με τον περίκυκλο του τετραγώνου ACB_aB_c (προφανές).

Ομοίως, αποδεικνύεται ότι και το σημείο N ανήκει επίσης στον κύκλο (O) και έστω το σημείο $K \equiv B_aB_c \cap MN$.



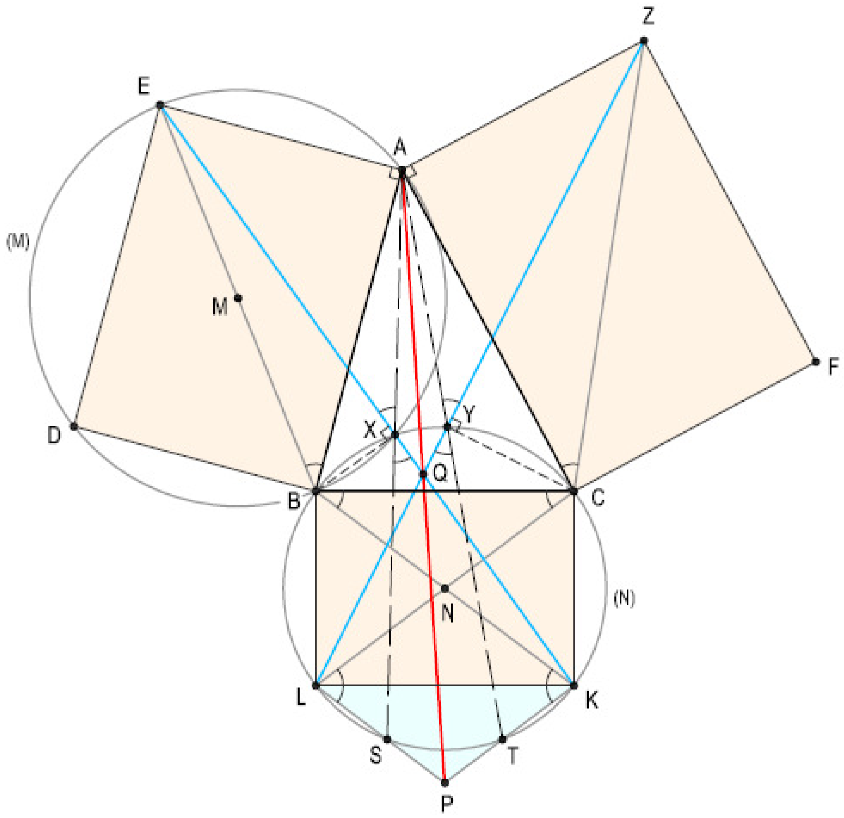
Από τις εφαπτόμενες PB_a, PB_c του κύκλου (O), έχουμε ότι η ευθεία B_aB_c ταυτίζεται με την Πολική ευθεία του σημείου P ως προς τον (O) και επειδή περνάει από το σημείο K, προκύπτει ότι η Πολική ευθεία του σημείου K ως προς τον (O), περνάει από το σημείο P.

Αλλά, από το εγγράψιμο τετράπλευρο MNB_aB_c έχουμε ότι η ευθεία που συνδέει το σημείο $B \equiv MB_c \cap NB_a$ με το σημείο $S \equiv MB_a \cap NB_c \equiv C_aB_a \cap A_cB_c$ ταυτίζεται με την Πολική ευθεία του K ως προς τον (O) και συμπεραίνεται έτσι ότι τα σημεία B, S, P, είναι συνευθειακά και το ισοδύναμο ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

- Ακολουθεί στα επόμενα σε διασκευή, η μία από τις δύο αποδείξεις που υπάρχουν στον παραπάνω δεύτερο σύνδεσμο του **AoPS**, για την επέκταση με όμοια ορθογώνια παραλληλόγραμμα επί των πλευρών του δοσμένου τριγώνου $\vartriangle ABC$, δημοσιευμένες από έναν δυνατό γεωμέτρη από το Βιετνάμ που υπογράφει με το ψευδώνυμο **TelvCohl**.

ΟΡΘΟΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ – ΠΡΟΤΑΣΗ 4 - ΕΠΕΚΤΑΣΗ

Με βάσεις τις πλευρές δοσμένου τριγώνου $\triangle ABC$ και προς το εξωτερικό μέρος αυτού, κατασκευάζουμε τα όμοια ορθογώνια παραλληλόγραμμα $ABDE$, $ACFZ$, $BCKL$ και ας είναι $\triangle PLK$, το ισοσκελές τρίγωνο επί της πλευράς KL, όμοιο με το $\triangle NBC$, όπου $N \equiv BK \cap CL$. Αποδείξτε ότι οι ευθείες EK, ZL, AP τέμνονται στο ίδιο σημείο.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ (TelvCohl – Βιετνάμ)

Έστω το σημείο $Q \equiv EK \cap ZL$ και αρκεί ως ισοδύναμο ζητούμενο να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A, Q, P,$ είναι συνευθειακά.

Έστω X, η προβολή του σημείου B επί της EK και από τα εγγράψιμα τετράπλευρα $AEBX$, $BLKX$, έχουμε ότι το X ανήκει στον περίκυκλο έστω (M) του $ABDE$, αλλά και στον περίκυκλο έστω (N) του $BCKL$ και έστω το σημείο $S \equiv LP \cap AX$.

Από $\angle KXS = \angle AXE = \angle ABE = \angle CBK = \angle KLS \quad \Rightarrow \quad \angle KXS = \angle KLS \quad (1)$

Από (1) προκύπτει ότι το τετράπλευρο $KXLS$ είναι εγγράψιμο και άρα, το σημείο S ανήκει επίσης στον κύκλο (N) και ομοίως αποδεικνύεται ότι και το σημείο έστω $T \equiv KP \cap AY$, όπου Y είναι η προβολή του σημείου C επί της ευθείας ZL, ανήκει επίσης στον κύκλο (N).

Θεωρούμε τώρα, το εγγεγραμμένο στον κύκλο (N) μη κυρτό εξάγωνο $KXSLYT$ και σύμφωνα με το **Θεώρημα Pascal**, συμπεραίνεται ότι τα σημεία $Q \equiv KX \cap LY$ και $A \equiv XS \cap YT$ και $P \equiv SL \cap TK$, ανήκουν στην ίδια ευθεία και το ισοδύναμο ζητούμενο έχει αποδειχθεί.